Künzer, Kohls Samstag, 03.03.2012

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur

Aufgaben, die **mit I gekennzeichnet** sind, gehören zu Mathematik I. Wer **nur** für Mathematik I angemeldet ist, bearbeitet **nur diese** Aufgaben. Dies gilt auch für fachübergreifende Schlüsselqualifikanden.

Aufgaben, die **mit II gekennzeichnet** sind, gehören zu Mathematik II. Wer **nur** für Mathematik II angemeldet ist, bearbeitet **nur diese** Aufgaben.

Wer für Mathematik I und II angemeldet ist, bearbeitet alle Aufgaben.

Bearbeitungszeit: Wenn Teil I und II bearbeitet wird: 180 Minuten.

Wenn nur Teil I oder II bearbeitet wird: 120 Minuten.

Zulässige Hilfsmittel: Zwei beliebig beschriebene Blätter DIN A4 und ein nichtprogrammierter Taschenrechner.

Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein.

Bitte eigenes **Papier** verwenden und jedes Blatt mit Name und Matrikelnummer versehen.

Lösungen ohne Angabe eines nachvollziehbaren **Lösungsweges** können nicht gewertet werden.

Soll eine Lösung **auf** n **Nachkommastellen genau** angegeben werden, so heißt dies, die verlangte näherungsweise Lösung soll von der tatsächlichen Lösung einen Abstand kleiner 10^{-n} aufweisen.

Das Argument für Sinus oder Cosinus ist im **Bogenmaß** zu nehmen; also z.B. $\sin(\pi/2) = 1$. Taschenrechner entsprechend **einstellen!**

Teil I

Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Berechne folgende Reihe bis auf 4 Nachkommastellen genau.

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k$$

Aufgabe I.2 (7 Punkte)

Sei $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ jeweils gegeben.

Berechne $\lim_{x \to 0} f(x)$ auf zwei Nachkommastellen genau.

(1) $f(x) := \dfrac{\sin(2x)}{x}$.

(2) $f(x) := \dfrac{(2^x - 1)^2}{x^2}$.

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Ein Bankkunde wünscht einen Kredit über 10000 Euro mit einer Laufzeit von 20 Jahren, bei nachschüssiger Zahlung der Raten. Die Bank veranschlagt einen Zinssatz von jährlich 6%. Berechne die erforderliche jährliche Rate. Das Ergebnis ist auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definiert durch

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leqslant 0\,. \end{cases}$$

Skizziere den Graphen von f.

Begründe mit der Definition der Stetigkeit, daß f an der Stelle 0 nicht stetig ist.

Aufgabe I.5 (6 Punkte)

In $\mathbf{R}^3$ seien die Ebenen $U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ gegeben.

Prüfe die angegebenen erzeugenden Tupel von U und V jeweils auf lineare Unabhängigkeit.

Bestimme eine Basis von $U \cap V$, also von der Schnittgeraden.

Aufgabe I.6 (5 Punkte)

Sei $t \in \mathbf{R}$. Berechne $\int_0^t x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung der Substitutionsregel.

Teil II

Aufgabe II.1 (6 Punkte)

Erfahrungsgemäß werden auf einem Markt $f(x) := \dfrac{1000}{2+x^2}$ Kilogramm Weizen nachgefragt, wenn der Verkäufer den Gewinn zu x Euro pro Kilogramm ansetzt. Es kann die Nachfrage auch immer voll befriedigt werden.

Bestimme die Elastizität von $f(x)$ und von $f'(x)$.

Wie hat der Verkäufer den Gewinn pro Kilogramm anzusetzen, um seinen Gesamtgewinn zu maximieren?

Wenn eine Aussage aus der Vorlesung verwandt werden soll, so sind auch deren Voraussetzungen im vorliegenden Fall zu überprüfen. Die Lösung ist auf 2 Nachkommastellen genau in Euro pro Kilogramm anzugeben.

Aufgabe II.2 (6 Punkte)

Sei $f(x) := \dfrac{x+1}{(x^2+1)\cdot x^2}$ definiert auf $D := \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Bestimme die Partialbruchzerlegung von $f(x)$. Hierbei können komplexe Koeffizienten auftreten.

Berechne $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+1)\cdot x^2}\,\mathrm{d}x$. Die Lösung ist auf 4 Nachkommastellen genau anzugeben.

Aufgabe II.3 (10 Punkte)

Sei $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - xy^2 - yz$ auf $\mathbf{R}^3$.

Seien $g_1(x,y,z) := xy + yz$ und $g_2(x,y,z) := xyz + y - 1$ auf $\mathbf{R}^3$.

(1) Ist $(0,0,0)$ eine lokale Extremstelle von f?

(2) Ist $(0,1,0)$ eine lokale Extremstelle von f unter den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$?

Aufgabe II.4 (6 Punkte)

Berechne $\int_0^\pi \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$. Eulersche Formel oder Produktregel kann helfen. Das Ergebnis ist auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben.

Aufgabe II.5 (6 Punkte)

Bestimme die Lösung $y(x)$ auf $\mathbf{R}$ der Differentialgleichung $y'' + y = x^3$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.