Künzer, Kohls Samstag, 03.03.2012

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösung zur Klausur

Aufgabe I.1

Erster Lösungsweg.

Es ist

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=3}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k &= \left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right) - \left(\textstyle\sum_{k=0}^{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{1-(-1/4)} - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \\
&= \frac{4}{5} - \frac{13}{16} \\
&= -\frac{1}{80} \\
&= -0{,}0125\,.
\end{aligned}$$

Zweiter Lösungsweg.

Es ist $\sum_{k=3}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k = -\frac{1}{64}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{1}{80} = -0{,}0125$.

Aufgabe I.2

(1) Der Zähler $z(x) := \sin(2x)$ ist auf $\mathbf{R}$ differenzierbar, mit Ableitung $z'(x) = 2\cdot\cos(2x)$. Es gilt $z(0) = 0$ und $z'(0) = 2$.

Der Nenner $n(x) := x$ ist auf $\mathbf{R}$ differenzierbar, mit Ableitung $n'(x) = 1$. Es gilt $n(0) = 0$ und $n'(0) = 1$.

Also ist l'Hôpital einmal anwendbar. Es wird

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{z(x)}{n(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{z'(x)}{n'(x)} = \frac{z'(0)}{n'(0)} = 2\,.$$

(2) *Erster Lösungsweg.*

Der Zähler $z(x) := (2^x - 1)^2$ ist auf $\mathbf{R}$ zweimal differenzierbar, mit Ableitungen

$$z'(x) = 2\cdot(2^x - 1)\cdot\ln(2)\cdot 2^x = 2\ln(2)\cdot(2^{2x} - 2^x)\,.$$

und

$$z''(x) = 2\ln(2)\cdot(2\ln(2)\cdot 2^{2x} - \ln(2)\cdot 2^x) = 2\ln(2)^2\cdot(2^{2x+1} - 2^x)\,.$$

Es gilt $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$ und $z''(0) = 2\ln(2)^2$.

Der Nenner $n(x) := x^2$ ist auf $\mathbf{R}$ zweimal differenzierbar, mit Ableitungen $n'(x) = 2x$ und $n''(x) = 2$. Es gilt $n(0) = 0$, $n'(0) = 0$ und $n''(0) = 2$.

Also ist l'Hôpital zweimal anwendbar. Es wird

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{z(x)}{n(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{z'(x)}{n'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{z''(x)}{n''(x)} = \frac{z''(0)}{n''(0)} = \ln(2)^2 \approx 0{,}48\,.$$

Zweiter Lösungsweg.

Da die Funktion $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $t\mapsto t^2$ stetig ist, ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\right)^2\,.$$

Der Zähler $z(x) := 2^x - 1$ ist auf $\mathbf{R}$ differenzierbar, mit Ableitung $z'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$. Es gilt $z(0) = 0$ und $z'(0) = \ln(2)$.

Der Nenner $n(x) := x$ ist auf $\mathbf{R}$ differenzierbar, mit Ableitung $n'(x) = 1$. Es gilt $n(0) = 0$ und $n'(0) = 1$.

Also ist l'Hôpital einmal anwendbar. Es wird

$$\lim_{x \to 0} \frac{z(x)}{n(x)} \;=\; \lim_{x \to 0} \frac{z'(x)}{n'(x)} \;=\; \frac{z'(0)}{n'(0)} \;=\; \ln(2) \; .$$

Insgesamt wird somit

$$\lim_{x \to 0} f(x) \;=\; \left(\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} \right)^2 \;=\; \ln(2)^2 \;\approx\; 0{,}48 \; .$$

Aufgabe I.3

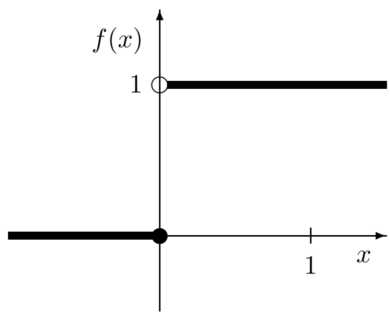
In Standardnotation ist $K_0 = -10000$, $T = 1$ Jahr, $n = 20$, $K_n = K_{20} = 0$ und $q = 1{,}06$. Gefragt ist R.

Es wird

$$R \;=\; \frac{q-1}{q^n - 1} \cdot (K_n - q^n K_0) \;=\; \frac{1{,}06 - 1}{1{,}06^{20} - 1} \cdot (0 - 1{,}06^{20}(-10000)) \;=\; 871{,}85 \text{ Euro.}$$

Aufgabe I.4

Skizze des Graphen von f.



Es ist f genau dann nicht stetig an der Stelle 0, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ so gibt, daß für alle $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ ein (zu δ passendes) $\tilde{x} \in \mathbf{R}$ existiert mit $|\tilde{x} - 0| < \delta$ und

$$|f(\tilde{x}) - f(0)| \;\geqslant\; \varepsilon \; .$$

Hierfür können wir z.B. $\varepsilon := \frac{1}{2}$ verwenden. Denn sei $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ vorgegeben. Für dieses δ können wir $\tilde{x} := \delta/2$ wählen. Dann ist $|\tilde{x} - 0| = \delta/2 < \delta$ und

$$|f(\tilde{x}) - f(0)| \;=\; |f(\delta/2) - f(0)| \;=\; |1 - 0| \;=\; 1 \;\geqslant\; \frac{1}{2} \;=\; \varepsilon \; .$$

Aufgabe I.5

Es ist $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ linear unabhängig, da die Zeilenstufenform der Matrix mit diesen 2 Spalten sich zu

$$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \;\rightsquigarrow\; \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$$

ergibt, und genau 2 Nichtnullzeilen enthält.

Es ist $(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right))$ linear unabhängig, da die Zeilenstufenform der Matrix mit diesen 2 Spalten sich zu

$$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$$

ergibt, und genau 2 Nichtnullzeilen enthält.

Zur Berechnung einer Basis von $U \cap V$ dürfen wir also die Matrix A durch Nebeneinanderstellen aller 4 erzeugenden Vektoren bilden und diese zur Zeilenstufenform umformen.

$$A = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&1&1\end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&1&1&1\end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{smallmatrix}\right)$$

Das Standardverfahren liefert also die (einelementige) Basis $(\left(\begin{smallmatrix}-1\\-2\\1\\1\end{smallmatrix}\right))$ von $\{\, x \in \mathbf{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\}$.

Also ist eine (einelementige) Basis von $U \cap V$ gegeben durch

$$(-1 \cdot \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) - 2 \cdot \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)) = (\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\-2\end{smallmatrix}\right)) \; .$$

Insbesondere ist $U \cap V$ in der Tat eine Gerade.

Aufgabe I.6

Sei $g(x) := x^2$ für $x \in \mathbf{R}$. Es ist $g'(x) = 2x$. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^t x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x & = & \int_0^t \frac{1}{2} \cdot g'(x) \cdot \cos(g(x))\,\mathrm{d}x \\
& = & \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \cos(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\
& = & \frac{1}{2} \cdot \int_{g(0)}^{g(t)} \cos(u)\,\mathrm{d}u \\
& = & \frac{1}{2} \cdot [\sin(u)]_{u=g(0)}^{g(t)} \\
& = & \frac{1}{2} \cdot (\sin(g(t)) - \sin(g(0))) \\
& = & \frac{1}{2} \cdot (\sin(t^2) - \sin(0)) \\
& = & \frac{1}{2} \cdot \sin(t^2) \; .
\end{array}$$

Aufgabe II.1

Es wird

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & 1000 \cdot \frac{1}{2+x^2} \\
f'(x) & = & 1000 \cdot \frac{-2x}{(2+x^2)^2} \\
f''(x) & = & 1000 \cdot \frac{-4+6x^2}{(2+x^2)^3} \; .
\end{array}$$

Es wird

$$\mathrm{E}_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = -\frac{2x^2}{2+x^2} \; .$$

Es wird

$$\mathrm{E}_{f'}(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x = \frac{2-3x^2}{2+x^2} \; .$$

Überprüfen wir die Voraussetzungen unseres Lemmas aus §7.2.2.

Es ist $f(x) = \frac{1000}{2+x^2} > 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Es ist $f'(x) = 1000 \cdot \frac{-2x}{(2+x^2)^2} < 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Für $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$ genau dann, wenn $-\frac{2x^2}{2+x^2} \geqslant -1$, also genau dann, wenn $2x^2 \leqslant 2 + x^2$, also genau dann, wenn $x \leqslant \sqrt{2}$.

Für $x \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ genau dann, wenn $\frac{2-3x^2}{2+x^2} \leqslant -2$, also genau dann, wenn $2 - 3x^2 \leqslant -4 - 2x^2$, also genau dann, wenn $x \geqslant \sqrt{6}$.

Dies ist nie beides zugleich der Fall. Also können wir unser Lemma anwenden.

Demgemäß nimmt der Gesamtgewinn $G(x) = x \cdot f(x)$ bei $x_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ sein Maximum an, falls $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$ ist, d.h. falls $-\frac{2x^2}{2+x^2} = -1$ ist, d.h. bei

$$x_0 \;=\; \sqrt{2} \;\approx\; 1{,}41 \quad \text{Euro pro Kilogramm}\,.$$

Aufgabe II.2

Für die Partialbruchzerlegung suchen wir A, B, C und D aus $\mathbf{C}$ mit

$$\frac{x+1}{(x^2+1)\cdot x^2} \;=\; \frac{x+1}{(x+\mathrm{i})\cdot(x-\mathrm{i})\cdot x^2} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{A}{x+\mathrm{i}} + \frac{B}{x-\mathrm{i}} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}\,.$$

Durchmultiplizieren mit $(x^2+1)\cdot x^2$ gibt die Bedingung

$$x + 1 \;=\; A(x^3 - \mathrm{i}x^2) + B(x^3 + \mathrm{i}x^2) + C(x^3 + x) + D(x^2 + 1)\,.$$

Wir formen das für $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$ entstehende lineare Gleichungssystem um.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1/2 & \mathrm{i}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -\mathrm{i}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i}/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i}/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2-\mathrm{i}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2+\mathrm{i}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dies liefert die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x+1}{(x^2+1)\cdot x^2} \;=\; -\frac{1}{2}\,\frac{1+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} - \frac{1}{2}\,\frac{1-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,.$$

Also wird

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \tfrac{x+1}{(x^2+1)\cdot x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \big(-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1-\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}} + \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x^2}\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \big(-\tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{x-\mathrm{i}} + \tfrac{1}{x+\mathrm{i}}) + \tfrac{\mathrm{i}}{2}(\tfrac{1}{x-\mathrm{i}} - \tfrac{1}{x+\mathrm{i}}) + \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x^2}\big)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\tfrac{1}{2}\,\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \ln(x) - \tfrac{1}{x}]_{x=1}^2 \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\ln(5/2) - \arctan(2) + \arctan(1) + \ln(2) + \tfrac{1}{2} \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\ln(5/8) - \arctan(2) + \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} \\ &\approx 0{,}4133\,. \end{aligned}$$

Aufgabe II.3

(1) Es ist

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2x-y^2 \\ 2y-2xy-z \\ 2z-y \end{pmatrix}\,.$$

Also ist

$$\nabla_f(0,0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

und somit $(0,0,0)$ eine Flachstelle von f.

Ferner ist

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -2y & 0 \\ -2y & 2-2x & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Also ist
$$\mathrm{H}_f(0,0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$
Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = 2 > 0$, $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = 4 > 0$ und
$$\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(0,0,0)) \;=\; \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \;=\; \det\left(2\right)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \;=\; 6 > 0 .$$
Also ist $(0,0,0)$ eine lokale Minimalstelle von f und so insbesondere eine lokale Extremstelle von f.

(2) Zunächst sind in der Tat $g_1(0,1,0) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$ und $g_2(0,1,0) = 0\cdot 1\cdot 0 + 1 - 1 = 0$.
Es ist, wie in (1),
$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2x-y^2 \\ 2y-2xy-z \\ 2z-y \end{pmatrix} .$$
Also ist
$$\nabla_f(0,1,0) \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$
Es ist
$$\nabla_{g_1}(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ y \end{pmatrix} ,$$
und also
$$\nabla_{g_1}(0,1,0) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$
Es ist
$$\nabla_{g_2}(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} yz \\ xz+1 \\ xy \end{pmatrix} ,$$
und also
$$\nabla_{g_1}(0,1,0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
Insgesamt ist also
$$N(0,1,0) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$
Folglich ist
$$\nabla_f(0,1,0) \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;=\; N(0,1,0)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$
wie sich als eindeutige Lösung eines linearen Gleichungssystems ergibt, auch ohne Lösungsverfahren. Der Lagrangemultiplikator ergibt sich also zu $r = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wegen $g_1(0,1,0) = 0$, $g_2(0,1,0) = 0$ und wegen der eindeutigen Existenz des Lagrangemultiplikators ist somit $(0,1,0)$ eine Flachstelle von f unter den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$.

Wir lösen nun $N(0,1,0)^{\mathrm{t}}\, u = 0$ für $u \in \mathbf{R}^{3\times 1}$. Es ist $N(0,1,0)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ bereits in Zeilenstufenform, so daß sich gemäß Algorithmus die allgemeine Lösung
$$\{\, u \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; N(0,1,0)^{\mathrm{t}}\, u = 0 \,\} \;=\; \{\, \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1 \in \mathbf{R} \,\}$$
und also $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt.

Auch jedes nichtverschwindende Vielfache von $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ kann hier als U Verwendung finden.

Weiter wird
$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= f(x,y,z) - \rho_1\, g_1(x,y,z) - \rho_2\, g_2(x,y,z) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 - xy^2 - yz) - (-1)\cdot(xy + yz) - 2\cdot(xyz + y - 1) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - xy^2 + xy - 2xyz - 2y + 2 . \end{aligned}$$
Folglich ist
$$\mathrm{H}_F(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -2y+1-2z & -2y \\ -2y+1-2z & 2-2x & -2x \\ -2y & -2x & 2 \end{pmatrix} ,$$

und also

$$\mathrm{H}_F(0,1,0) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Es wird

$$U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(0,1,0)\,U \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 8 \end{smallmatrix}\right) \;.$$

Diese Matrix ist positiv definit, da $\mathrm{M}_1(\left(\begin{smallmatrix} 8 \end{smallmatrix}\right)) = 8 > 0$ ist.

Also ist $(0,1,0)$ eine lokale Minimalstelle und so insbesondere eine lokale Extremstelle von f unter den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$.

Aufgabe II.4

Erster Lösungsweg.

Mit der Eulerschen Formel wird

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^\pi \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x & = & \int_0^\pi \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x \\
& = & \frac{1}{4\mathrm{i}} \int_0^\pi (\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x \\
& = & \frac{1}{4\mathrm{i}} [\frac{1}{3\mathrm{i}}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \frac{1}{-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \frac{1}{-3\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}]_{x=0}^\pi \\
& = & \frac{1}{4\mathrm{i}} (\frac{1}{3\mathrm{i}}((-1)-1) + \frac{1}{\mathrm{i}}((-1)-1) - \frac{1}{-\mathrm{i}}((-1)-1) - \frac{1}{-3\mathrm{i}}((-1)-1)) \\
& = & (-2)\frac{1}{4\mathrm{i}}(2\frac{1}{3\mathrm{i}} + 2\frac{1}{\mathrm{i}}) \\
& = & \frac{4}{3} \\
& \approx & 1{,}33\;.
\end{array}$$

Zweiter Lösungsweg.

Mit zweimaliger Anwendung der Produktregel kann man wie folgt argumentieren. Aus

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^\pi \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x & = & [-\frac{1}{2}\cos(2x)\cos(x)]_{x=0}^\pi - \int_0^\pi (-\frac{1}{2}\cos(2x))(-\sin(x))\,\mathrm{d}x \\
& = & 1 - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
& = & 1 - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin(2x)\sin(x)]_{x=0}^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
& = & 1 + \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x
\end{array}$$

folgt

$$\frac{3}{4}\int_0^\pi \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 1$$

und also

$$\int_0^\pi \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{4}{3} \;\approx\; 1{,}33\;.$$

Dritter Lösungsweg.

Mit Substitution wird

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^\pi \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x & = & \int_0^\pi 2\sin(x)\cos(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
& = & -2\int_0^\pi (\cos(x))^2\,(\cos(x))'\,\mathrm{d}x \\
& = & -2\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} u^2\,\mathrm{d}u \\
& = & -2[\frac{1}{3}u^3]_{u=1}^{-1} \\
& = & -2(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) \\
& = & \frac{4}{3} \\
& \approx & 1{,}33\;.
\end{array}$$

Aufgabe II.5

In Standardnotation ist $a = 0$, $b = 1$ und $c(x) = x^3$.

In Standardnotation ist $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ und $y_0' = 0$.

Wir suchen eine spezielle Lösung der Form $\hat{y}(x) = \lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \xi$ mit $\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \xi\ \in\ \mathbf{R}$, welche die inhomogene Differentialgleichung $\hat{y}''(x) + \hat{y}(x) = x^3$ erfüllt.

Es sollte also

$$x^3 \ \stackrel{!}{=}\ \hat{y}''(x) + \hat{y}(x) \ = \ (6\lambda x + 2\mu) + (\lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \xi) \ = \ \lambda x^3 + \mu x^2 + (6\lambda + \nu)x^1 + (2\mu + \xi)x^0$$

sein.

Koeffizientenvergleich liefert (auch ohne Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme) bei x^3, daß $\lambda = 1$ ist, dann bei x^2, daß $\mu = 0$ ist, dann bei x^1, daß $\nu = -6\lambda = -6$ ist, dann bei x^0, daß $\xi = -2\mu = 0$ ist.

Insgesamt ist also $\hat{y}(x) = x^3 - 6x$.

Wir suchen die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $u'' + u = 0$.

Es ist $a^2 = 0 < 1 = b$. Es ist $w = \sqrt{b - a^2} = 1$. Also ist für alle $r,\ s\ \in\ \mathbf{R}$

$$u(x) \ = \ \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) \ = \ r\sin(x) + s\cos(x)$$

eine Lösung von $u'' + u = 0$.

Wir bestimmen die Parameter r und s durch Einsetzen der Anfangswertbedingungen.

Es soll die Lösung

$$y(x) \ = \ \hat{y}(x) + u(x) \ = \ x^3 - 6x + r\sin(x) + s\cos(x)$$

von $y'' + y = x^3$ die Anfangswertbedingungen erfüllen.

Zunächst wird

$$y'(x) \ = \ 3x^2 - 6 + r\cos(x) - s\sin(x)\ .$$

Es sollte also

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & = & 1 & \stackrel{!}{=} & y(0) & = & s \\ y_0' & = & 0 & \stackrel{!}{=} & y'(0) & = & -6 + r \end{array}$$

sein.

Es ergibt sich (auch ohne Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme) aus der ersten Bedingung, daß $s = 1$ ist, aus der zweiten sodann, daß $r = 6$ ist.

Insgesamt erhalten wir die Lösung

$$y(x) \ = \ x^3 - 6x + 6\sin(x) + \cos(x)$$

unserer inhomogenen Differentialgleichung $y'' + y = x^3$ unter den gegebenen Anfangswertbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.