Aufgabe 1 (*3 Punkte*) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k \frac{k-1}{k(k+1)} = \frac{2^{n+1}}{n+1} - 2.$$

- Induktionsanfang: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} 2^k \frac{k-1}{k(k+1)} = 2^1 \cdot \frac{0}{1 \cdot 2} = 0 = \frac{2^2}{2} - 2.$
- Induktionsschluss $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 2^k \frac{k-1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} 2^k \frac{k-1}{k(k+1)} \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{2^{n+1}}{n+1} - 2 + 2^{n+1} \frac{n}{(n+1)(n+2)} \\
&= 2^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{(n+1)(n+2)} \right) - 2 \\
&= 2^{n+1} \left(\frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{(n+1)(n+2)} \right) - 2 \\
&= 2^{n+1} \frac{2n+2}{(n+1)(n+2)} - 2 \\
&= 2^{n+1} \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)} - 2 \\
&= \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*10 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $D = T^\top AT$.

(a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -(2+\lambda)((1-\lambda)^2 - 9) = -(2+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8).$$

Die Nullstellen von χ_A sind dann gegeben durch $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 4$. Damit haben wir einen einfachen Eigenwert 4 und einen doppelten Eigenwert -2.

Der Eigenraum E_4 zum Eigenwert 4 ist gerade die Lösungsmenge des homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist $E_4 = L((1,1,0)^\top)$.

Ebenso bestimmen wir den Eigenraum E_{-2} zum Eigenwert -2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_{-2} = L((1,-1,0)^\top, (0,0,1)^\top).$$

(b) Die oben berechneten Eigenvektoren sind bereits paarweise orthogonal. Es muss also nur noch normiert werden. Damit haben wir

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (*13 Punkte*)

(a) Geben Sie an, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{\sqrt{3+n^2}}$$

divergent, konvergent oder sogar absolut konvergent ist. Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}\, x^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(7-(-1)^n)^{2n} x^n$

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sowie $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Zeigen Sie:

(i) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x) \geqq \frac{x}{2}$ für alle $x \in [0, \varepsilon]$ gilt.

(ii) Ist $f_n(x) := f\left(\frac{x}{n}\right)$, dann divergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$.

(a) Die Reihe ist konvergent nach dem Leibnizkriterium, da $\dfrac{3}{\sqrt{3+n^2}}$ monoton fallend gegen 0 konvergiert.

Die Reihe ist jedoch nicht absolut konvergent nach dem Minorantenkriterium, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{3+n^2}} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{4n^2}} = \underbrace{\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{divergente Minorante}}$$

(b) (i) Sei $a_n = \frac{n}{4^n}$. Dann kann man den Konvergenzradius ρ bestimmen durch

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

bzw. durch

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n}} = 4.$$

(ii) Sei $a_n = (7-(-1)^n)^{2n}$. Dann ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 64 & \text{, für ungerade } n, \\ 36 & \text{, für gerade } n, \end{cases}$$

damit ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 64$ und $\rho = \dfrac{1}{64}$.

(c) (i) Nach dem Satz von Taylor gilt für $x \in [0, 1]$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

für ein $\xi \in [0,x] \subseteqq [0,1]$.

Da f'' nach Voraussetzung stetig ist, existiert $M := \max_{\xi\in[0,1]} |f''(\xi)|$. Dann ist aber für $x \in [0,\varepsilon]$:

$$f(x) \geqq x - \frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2 \geqq x\left(1-\frac{M}{2}x\right) \geqq x\left(1-\frac{M}{2}\varepsilon\right) > \frac{x}{2},$$

falls $\varepsilon < \min\{1, 1/M\}$ gewählt wird.

(ii) Sei nun ε wie in Teil (i). Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $1/n < \varepsilon$ für alle $n > N$. Für das Konvergenzverhalten der Reihe sind die ersten Glieder uninteressant, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) \text{ ist konvergent (divergent)} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=N}^{\infty} f_n(1) \text{ ist konvergent (divergent)}$$

Nach Teil (i) ist dann

$$\sum_{n=N}^{\infty} f_n(1) = \sum_{n=N}^{\infty} f\Big(\underbrace{\frac{1}{n}}_{<\varepsilon}\Big) \overset{(i)}{\geqq} \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2n}}_{\text{divergente Minorante}}$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt dann die Divergenz der betrachteten Reihe.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Geben Sie für die folgenden uneigentlichen Integrale jeweils an, ob sie konvergieren. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-4x}}{x+x^2}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x+x^2}\,\mathrm{d}x$

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-4x}}{x+x^2}\,\mathrm{d}x$ ist divergent nach dem Minorantenkriterium, denn es ist

$$\int_0^1 \frac{e^{-4x}}{x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-4x}}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x \geqq \underbrace{\frac{e^{-4}}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{divergente Minorante}}$$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x+x^2}\,\mathrm{d}x$ ist konvergent nach dem Majorantenkriterium, denn es ist

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x+x^2}\,\mathrm{d}x \leqq \underbrace{\frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{\text{konvergente Majorante}}$$

Aufgabe 5 (*12 Punkte*) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 10 + 3x - y^2x - 4x^3$.
Außerdem sei $v = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(-1,1)^\top$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und die Hessematrix $\mathrm{H}f(x,y)$ von f.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(1,\,1)$.

(c) Berechnen Sie alle kritischen Stellen von f und bestimmen Sie jeweils, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt.

(a) Wir haben

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3 - y^2 - 12x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\,f(x,y) = \begin{pmatrix} -24x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\partial_v f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot v = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\sqrt{2}.$$

(c) Zunächst bestimmen wir die kritischen Punkte von f.

$$\nabla f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2xy = 0 \text{ und } y^2 + 12x^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \text{ und } y^2 = 3) \text{ oder } (y = 0 \text{ und } 12x^2 = 3).$$

Damit ergeben sich die vier kritischen Stellen $S_{1/2} = (0, \pm\sqrt{3})$ und $S_{3/4} = (\pm\frac{1}{2}, 0)$.
Zur Klassifikation betrachten wir $\mathrm{H}\,f(S_j)$, $j = 1,2,3,4$.

$$\mathrm{H}\,f(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit } \Rightarrow \text{ dort liegt ein Sattelpunkt vor,}$$

$$\mathrm{H}\,f(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit } \Rightarrow \text{ dort liegt ein Sattelpunkt vor,}$$

$$\mathrm{H}\,f(S_3) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ist negativ definit } \Rightarrow \text{ dort liegt ein lokales Maximum vor,}$$

$$\mathrm{H}\,f(S_4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit } \Rightarrow \text{ dort liegt ein lokales Minimum vor.}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)

(a) Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Ebene E_1 und der Punkt P mit

$$E_1 : x = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}, \qquad P = (-1, 3, 1).$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1 sowie den Abstand $d(P, E_1)$ des Punktes P von der Ebene E_1.

Hessesche Normalform von E_1 : $\boxed{-\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = 2\sqrt{6}}$

$d(P, E_1) = \boxed{\sqrt{6}}$

(b) Gegeben seien die beiden Ebenen $E_2 : 2x_1 - x_2 = 4$ und $E_3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = -7$.

Bestimmen Sie den Schnittwinkel α von E_2 und E_3.

$\alpha = \boxed{90°}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & t \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & 2t & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie bei **(a)**–**(c)** an, für welche t die folgenden Aussagen gelten. Wenn es keine solche t gibt, so ist $\emptyset$ einzutragen.

(a) Das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung für	$t \in$	$\mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$
(b) Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen für	$t \in$	$\{-1\}$
(c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar für	$t \in$	$\{2\}$
(d) Geben Sie die Lösung für $t = 0$ explizit an:	$(x_1, x_2, x_3) =$	$(-3, \frac{1}{2}, 1)$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r \in [0, +\infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an:

$$64i = \boxed{64e^{\frac{\pi}{2}i}}$$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 = 64i\ .$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in der Form $z = re^{i\varphi}$, $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, als auch in der Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\boxed{z_1 = 4e^{\frac{1}{6}\pi i} = 2\sqrt{3} + 2i,\ z_2 = 4e^{\frac{5}{6}\pi i} = -2\sqrt{3} + 2i,\ z_3 = 4e^{\frac{3}{2}\pi i} = -4i}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Reihenwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^{10}+7^n}{7^n+5^n} = \boxed{1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{1-e^x+x} = \boxed{-2}$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2^k}{k!} = \boxed{e^{-2}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{3n^2} = \boxed{e^6}$

Aufgabe 10 (*9 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int 4xe^{-x}\,\mathrm{d}x \;=\; \boxed{\left[-4(x+1)e^{-x}\right]}$

(ii) $\int \cos(x)e^{3\sin(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \boxed{\left[\frac{1}{3}e^{3\sin(x)}\right]}$

(b) Geben Sie die reelle Partialbruchzerlegung der folgenden Funktion an:

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^3} = \boxed{\frac{1}{(x-1)} + \frac{-3}{(x-1)^3}}.$$

Berechnen Sie damit

$$\int \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\ln|x-1| + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2}\right]}.$$