Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ernen, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf, geod und so weiter ;)

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Die archimedische Spirale wird durch

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad A(\varphi) = (\varphi \cos \varphi, \varphi \sin \varphi)^T$$

parametrisiert. Für $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ begrenzt diese zusammen mit dem Geradenstück

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3\pi \leq x \leq -\pi,\ y = 0\}$$

ein ebenes Gebiet $\overline{J}$. Bestimmen Sie für $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) = (-y,x)^T$ die Zirkulation von g entlang des Randes von $\overline{J}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
1. Variante: Direkt über Randintegral

Wir parametrisieren den linearen Teil des Rands $\partial\overline{J}$ durch

$$C_G : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad C_G(\varphi) = (-3\,\pi + 2\pi\varphi, 0)^\top$$

und den Rest wie in der Aufgabenstellung angegeben duch die archimedische Spirale A auf $[\pi, 3\,\pi]$ eingeschränkt. Damit folgt der Ansatz:

$$\begin{aligned} Z(g, \partial\overline{J}) &= \int_{\partial\overline{J}} g(s)ds \\ &= \int_0^1 g(C_G(\varphi)) \cdot C_G'(\varphi)d\varphi + \int_\pi^{3\,\pi} g(A(\varphi)) \cdot A'(\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

Da das Vektorfeld g u.a. die Koordinaten vertauscht, ist das Kurvenintegral über den linearen Teil identisch 0.
Mit

$$A'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \varphi \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) + \varphi \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

folgt also

$$\begin{aligned} Z(g, \partial\overline{J}) &= \int_\pi^{3\,\pi} g(A(\varphi)) \cdot A'(\varphi)d\varphi \\ &= \int_\pi^{3\,\pi} \begin{pmatrix} -\varphi \sin(\varphi) \\ \varphi \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \varphi \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) + \varphi \cos(\varphi) \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_\pi^{3\,\pi} -\varphi \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \varphi^2 \sin(\varphi)^2 + \varphi \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \varphi^2 \cos(\varphi)^2 \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_\pi^{3\,\pi} \varphi^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\varphi^3 \Big|_\pi^{3\,\pi} = \frac{26}{3}\pi^3 \end{aligned}$$

2. Variante: Mit Green

Die Fläche $\overline{J}$ kann mittels ebener Polarkoordinaten durch die Abbildung

$$\Phi : Q \to \mathbb{R}^2 : (r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T,$$
$$Q := \{(r,\varphi)|\ \pi \le \varphi \le 3\pi,\ 0 \le r \le \varphi\}$$

parametrisiert werden. Da

$$\operatorname{rot} g(x,y) = 1-(-1) = 2,$$

folgt mit dem Greenschen Satz in der Ebene und weil

$$|\det \Phi'(r,\varphi)| = r:$$

$$\begin{aligned}
Z(g,\partial\overline{J}) &= \int_{\overline{J}} \operatorname{rot} g(x,y)dxdy \\
&= 2\int_{\pi}^{3\pi}\int_0^{\varphi} r dr d\varphi = \int_{\pi}^{3\pi} r^2 \,|_0^{\varphi}\, d\varphi \\
&= \frac{1}{3}\varphi^3 \,|_{\pi}^{3\pi} = \frac{26}{3}\pi^3.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Rotiert man das in der (x,z)-Ebene gelegene Rechteck $[1,2]\times[0,2]$ um die z-Achse, so entsteht eine Menge $M\subset\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Ausfluss des Vektorfelds

$$g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x,y,z)=(xz,3yz^2+y^2,zy-z^3)^T$$

durch den Rand von M.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Offenbar ist

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|1\le x^2+y^2\le 4, 0\le z\le 2\right\},$$

d.h. M lässt sich in Zylinderkoordinaten durch

$$\Phi:[1,2]\times[0,2\pi]\times[0,2]\longrightarrow M \quad \text{mit} \quad \Phi(r,\varphi,z)=(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi),z)^T$$

parametrisieren. Wir erhalten mit Gauss den Ausfluss von g durch den Rand ∂M von M somit durch

$$A(g,\partial M)=\iiint_M \operatorname{div} g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Da

$$\operatorname{div} g(x,y,z)=z+3z^2+2y+y-3z^2=z+3y$$

und $|\det\Phi'(r,\varphi,z)|=r$ folgt:

$$\begin{aligned}
A(g,\partial M)&=\int_{r=1}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{2}(z+3r\sin(\varphi))\cdot r \quad \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\
&=\int_{r=1}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}z^2r+3zr^2\sin(\varphi)\right)\Big|_{z=0}^{2}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\
&=\int_{r=1}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\big(2r+6r^2\sin(\varphi)\big)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\
&=\int_{r=1}^{2}\big(2r\varphi-6r^2\cos(\varphi)\big)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}r\\
&=\int_{r=1}^{2}4r\pi\mathrm{d}r=2r^2\pi\Big|_1^2=6\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösung $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
1. Variante (mit Minimalpolynom) (siehe Satz 6.3.7) Wir erhalten

$$v = y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 v = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

und damit $A^2v + 9v = 0$. Das zugehörige Polynom

$$p(X) = X^2 + 9$$

hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 3i$, und damit lautet das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung

$$g_1(x) = \cos(3x), \quad g_2(x) = \sin(3x).$$

Das Anfangswertproblem hat dann die Lösung

$$f(x) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ v & Av \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} M(0)^{-T} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

mit der zugehörigen Wronski-Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{pmatrix}$$

mit

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M(0)^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(3x) - \sin(3x) \\ -2\sin(3x) \\ \cos(3x) + \frac{2}{3}\sin(3x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Variante (mit charakteristischem Polynom) (siehe Satz 6.3.4) Wie oben erhalten wir

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 v = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\chi_A(X) = (3-X)\,((3-X)(-3-X)+18) = (3-X)(X^2+9)$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 3i$, $\lambda_3 = 3$. Das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung lautet damit

$$g_1(x) = \cos(3x), \quad g_2(x) = \sin(3x), \quad g_3(x) = e^{3x}.$$

Das Anfangswertproblem hat dann die Lösung

$$f(x) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v & Av & A^2 v \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} M(0)^{-T} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix}$$

mit der zugehörigen Wronski-Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) & e^{3x} \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) & 3e^{3x} \\ -9\cos(3x) & -9\sin(3x) & 9e^{3x} \end{pmatrix},$$

also

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad M(0)^{-T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \\ e^{3x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(3x) - \sin(3x) + e^{3x}) \\ \frac{1}{3}\sin(3x) \\ \frac{1}{18}(-\cos(3x) - \sin(3x) + e^{3x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \\ e^{3x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(3x) - \sin(3x) \\ -2\sin(3x) \\ \cos(3x) + \frac{2}{3}\sin(3x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = x.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

1. **Berechnung der Lösung y_h der homogenen Gleichung.** Das charakteristische Polynom der Gleichung lautet:

$$p(X) = X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1),$$

also lauten die Grundlösungen g_1, g_2 und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung so:

$$g_1(x) = e^{3x},\ g_2(x) = e^{-x}, \quad y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Berechnung einer Partikulärlösung y_p der inhomogenen Gleichung.**

Ansatz nach Art der rechten Seite. Resonanz liegt nicht vor, also lautet hier der Ansatz $y_p(x) = \alpha x + \beta$, das heißt:

$$y_p(x) = \alpha x + \beta,\ y_p'(x) = \alpha,\ y_p''(X) \equiv 0.$$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich:

$$-2\alpha - 3\alpha x - 3\beta \overset{!}{=} x \iff \alpha = -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3} = 3\beta \iff \alpha = -\frac{1}{3},\ \beta = \frac{2}{9}.$$

Damit lautet eine Partikulärlösung

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}.$$

Alternativlösung: Variation der Konstanten. Ansatz $y_p(x) = c_1(x)\, e^{3x} + c_2(x)\, e^{-x}$.
Wronski-Matrix $M(x)$ zu den Grundlösungen:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -e^{-3x} & -e^{-3x} \\ -3e^{x} & e^{x} \end{pmatrix}.$$

Differentialgleichungen für die „Konstanten“:

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -e^{-3x} & -e^{-3x} \\ -3e^{x} & e^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}x\begin{pmatrix} -e^{-3x} \\ e^{x} \end{pmatrix}.$$

Integration liefert als Stammfunktionen zum Beispiel

$$c_1(x) = -\frac{3x+1}{36}e^{-3x}, \quad c_2(x) = \frac{1}{4}(1-x)\,e^{x},$$

was dann hier auf die Partikulärlösung $\tilde{y}_p$ führt:

$$\tilde{y}_p(x) = c_1(x)\, e^{3x} + c_2(x)\, e^{-x} = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9} = y_p(x).$$

Zufällig gilt hier $y_p = \tilde{y}_p$.

3. **Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.** Die Gesamtlösung y ist also durch

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R},$$

gegeben.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(4+x^2)\,y' = 4+y^2, \quad y(0)=2.$$

Hinweis: Den Definitionsbereich der Lösung müssen Sie nicht bestimmen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Es ist $4+x^2>0$ und $4+y^2>0$, also kann man die Differentialgleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ separieren:

$$\begin{aligned}
(4+x^2)\,y' = 4+y^2 &\iff \frac{y'}{4+y^2} = \frac{1}{4+x^2}\\
&\iff \int \frac{y'}{4+y^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x\\
&\iff \int \frac{1}{4+w^2}\mathrm{d}w|_{w=y} = \int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x\\
&\iff \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(w/2)^2}\mathrm{d}w|_{w=y} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}\mathrm{d}x\\
&\iff \arctan(\frac{y}{2}) = \arctan(\frac{x}{2}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Da 0 im Definitionsbereich ist, löst man nach y mit dem Hauptzweig der Tangens-Funktion auf:

$$y(x) = 2\tan\big(\arctan(\frac{x}{2}) + C\big),$$

Anfangswerte anpassen:

$$y(0) = 2\tan C \overset{!}{=} 2 \iff C = \frac{\pi}{4},$$

also

$$y(x) = 2\tan\big(\arctan(\frac{x}{2}) + \frac{\pi}{4}\big).$$

Variante „automatisch richtige Anfangswerte“: Natürlich könnte man auch bestimmt integrieren:

$$\begin{aligned}
&(4+x^2)\,y' = 4+y^2 \quad \text{und} \quad y(0)=2\\
\iff &\int_0^x \frac{y'(\xi)}{4+\big(y(\xi)\big)^2}\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{1}{4+\xi^2}\mathrm{d}\xi \quad \text{und} \quad y(0)=2\\
\iff &\int_2^y \frac{1}{4+\eta^2}\mathrm{d}\eta = \int_0^x \frac{1}{4+\xi^2}\mathrm{d}\xi\\
\iff &\arctan(\frac{\eta}{2})\Big|_{\eta=2}^{y} = \arctan(\frac{\xi}{2})\Big|_{\xi=0}^{x}\\
\iff &\arctan(\frac{y}{2}) = \arctan(\frac{x}{2}) + \arctan(1)\\
\iff &y(x) = 2\tan\big(\arctan(\frac{x}{2}) + \frac{\pi}{4}\big).
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: *(9 Punkte)*
Die 2π-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{für } -\pi\le x<-\frac{\pi}{2},\\ -1 & \text{für } -\frac{\pi}{2}\le x<0,\\ 0 & \text{für } x=0,\\ 1 & \text{für } 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(b) Geben Sie für alle $x\in[-\pi,\pi]$ an, gegen welchen Wert die Fourier-Reihe von f im Punkt x konvergiert.

(c) Begründen Sie, ob f eine 2π-periodische Stammfunktion besitzt. Falls das so ist, geben Sie die Fourier-Reihe einer solchen Stammfunktion an.

Hinweise: Ausdrücke der Form $\sin(j\pi/2)$ bzw. $\cos(j\pi/2)$ müssen ausgerechnet werden. Ausdrücke der Form $1\pm(-1)^j$ müssen nicht weiter vereinfacht werden ($j\in\mathbb{N}_0$).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) Die Funktion f ist offenbar ungerade, daher gilt $a_k=0$, $k\in\mathbb{N}_0$.
Für die Sinus-Koeffizienten b_k, $k\in\mathbb{N}$, erhält man unter Ausnutzung der Eigenschaften von f

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(kx)\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(kx)\mathrm{d}x=\frac{2}{k\pi}\Big[-\cos(kx)\Big]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{2}{k\pi}\big(1-\cos(k\frac{\pi}{2})\big)\end{aligned}$$

Also gilt

$$b_k=\begin{cases}\frac{2}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade},\\ \frac{1}{j\pi}(1-(-1)^j) & \text{für } k=2j \text{ gerade}.\end{cases}$$

Die Fourierreihe ist dann

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2}{\pi}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^j}{2j}\sin(2jx)\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{2(2l+1)}\sin(2(2l+1)x)\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1}+\frac{\sin((4j+2)x)}{2j+1}\right).\end{aligned}$$

(b) f ist stetig differenzierbar in den Stellen $-\pi$, π und in (π, π) bis auf die Sprungstellen bei $\pm\frac{\pi}{2}$ und 0, da f stückweise konstant ist existieren die einseitigen Grenzwerte, also konvergiert die Fourierreihe nach Satz 7.3.4 gegen die folgenden Werte in $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1}+\frac{\sin((4j+2)x)}{2j+1}\right)=\begin{cases} f(x), & x\in[-\pi,\pi]\setminus\{-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}\},\\ -\frac{1}{2} & x=-\frac{\pi}{2},\\ 0 & x=0,\\ \frac{1}{2} & x=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

(c) Da die Fourierreihe von f eine reine Sinusreihe ist, ist der erste Kosinuskoefizient a_0 natürlich 0 und f besitzt eine (stückweise) Stammfunktion F, die ebenfalls 2π-periodisch ist.

Gliedweise integration liefert

$$\begin{aligned} F(x) &\sim -\frac{2}{\pi}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^j}{4j^2}\cos(2jx)\right)\\ &= -\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2}+\frac{\cos((4j+2)x)}{2(2j+1)^2}\right). \end{aligned}$$