Universität Stuttgart Prof. Dr. K. Höllig

Diplomvorprüfung Höhere Mathematik I–III

Herbst 1998
1. Klausur für Studierende der Fachrichtung Physik
am 31. August 1998

Bitte unbedingt beachten:

- Verlangt und gewertet werden **alle** der folgenden 9 Aufgaben. (Bearbeitungszeit: 180 Minuten).
- Als Hilfsmittel sind 30 vom Kandidaten persönlich beschriebene Blätter zugelassen. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher und elektronische Rechengeräte.
- **Falls in der Aufgabe nicht anders verlangt, sind die Lösungswege anzugeben. Eine Angabe des Endergebnisses allein genügt nicht.**

Hinweise für Wiederholer:

- Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, daß zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis. Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 26. 10. 1998 durch Aushang in V57, 8. Stock, bekanntgegeben.
- Wiederholer, bei denen die Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird, müssen sich bis zum 6. 11. 1998 im Sekretariat des 2. Lehrstuhls des Mathematischen Instituts A, V57 8–162 einen Termin für die mündliche Nachprüfung geben lassen. Eine individuelle schriftliche Einladung erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich zu den angegebenen Terminen über das Ergebnis der schriftlichen Wiederholungsprüfung zu informieren und sich gegebenenfalls zu dem vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
- Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.
(**Begründung ist nicht notwendig.**)

a) $\sum_j 2^j/j^2$ konvergiert absolut.

b) $\det A = 0 \;\Rightarrow\; 0$ ist Eigenwert von A.

c) Die Menge $\mathcal{Q}:\; x^2 - 4xy + y^2 = 0$ ist eine Ellipse.

d) $\operatorname{grad} f \parallel \operatorname{grad}(f^2)$.

e) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = 0.$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Bestimmen Sie die Projektion Q des Punktes $P = [1,0,1]^t$ auf die Gerade $\mathcal{G}$: $[1,0,-1]^t + t\,[0,1,1]^t$, sowie die Hesse-Normalform

a) der Ebene durch P und $\mathcal{G}$,

b) der Ebene durch P senkrecht zu $\mathcal{G}$,

c) der Ebene durch $\mathcal{G}$ mit maximalem Abstand zu P.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Bestimmen Sie Typ und Hauptachsen der Quadrik

$$\mathcal{Q}: \quad 5x^2 + 4xy + 8y^2 = 5\ .$$

In welchen Punkten sind die Tangenten parallel zur x-Achse?

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln x)^2 dx\,,$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx\,,$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx\,.$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Bestimmen Sie für die Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F\left(\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \ln r & \cos\theta \\ \ln r & \sin\theta \end{bmatrix}$$

die Jacobi-Matrix F' und deren Inverse. Drücken Sie $dxdy$ durch $drd\theta$ aus und berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial x}\,,\ \frac{\partial \theta}{\partial y}\,,\ \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}$$

als Funktionen von r und θ.

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ folgender Differentialgleichungen

a) $x' = \dfrac{tx^2}{1+t^2},\ x(0) = 1$

b) $x'(2x+t) + x = 0,\ x(0) = a > 0$

c) $x' + 2x = \cos t,\ x(0) = x(2\pi)$

Aufgabe 7 (15 Punkte)

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. (**Begründung ist nicht notwendig.**)

a) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = 0$

b) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z-3} = 2\pi i$

c) $[\cos x, \sin y]$ besitzt ein Potential

d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-13)\,dx = \hat{f}(0)$

e) Der Fluß eines linearen Feldes $F(X) = AX$ durch die Oberfläche eines Körpers $\mathcal{K}$ ist proportional zu $\operatorname{vol}(\mathcal{K})$

Aufgabe 8 (20 Punkte)

Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes

$$F = s^{2z} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad s = \sqrt{x^2+y^2}$$

durch den Mantel ($s = a$) des Zylinders $\mathcal{V}: \ s \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$ nach außen, sowie mit Hilfe des Satzes von Gauß $\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz$.

Aufgabe 9 (15 Punkte)

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_j und b_j der reellen Fourier-Reihe von $f(x) = x(\pi - |x|),\ |x| \leqslant \pi$. Geben Sie ebenfalls die Koeffizienten $\tilde{a}_j$ und $\tilde{b}_j$ der Stammfunktion $\int_0^x f(y)dy$ an.