

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Fachrichtung:

Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bei allen Aufgaben sind **begründete Antworten** verlangt.
Sie können diese direkt auf das Aufgabenblatt schreiben.
- Die Aufgaben sind nach Themen gruppiert. Die Notenskala wird so berechnet, dass Sie eine Aufgabe als **optional** betrachten (und eventuell weglassen) können.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig. (Tipp: Verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine Frage.)
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/10	/12	/10	/12	/10	/67

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	0.90	0.82	0.74	0.67	0.61	0.55	0.50	0.45	0.41	0.37	0.33	0.30	0.27	0.25	0.22	0.20	0.18	0.17	0.15	0.14

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

**Aufgabe 2.** *Verständnisfragen* ($2+2+2+2+2+2 = 12$ Punkte)

Bitte beantworten Sie folgende Fragen mit einer kurzen und überzeugenden Begründung (zum Beispiel durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

Frage 2A. Seien $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) . Folgt hieraus $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$?

Begründete Antwort:

Frage 2B. Hat jedes Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot}(f) = 0$ ein Potential?

Begründete Antwort:

Frage 2C. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die Kugeloberfläche und sei $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein quellenfreies Vektorfeld, also $\text{div}(f) = 0$. Folgt hieraus für das Flussintegral $\int_S f \bullet dS = 0$?

Begründete Antwort:

Frage 2D. Die Differentialgleichung $y + (1 - e^{-x})y' = 0$ ist nicht exakt. Erlaubt Sie einen integrierenden Faktor, der nur von x abhängt?

Begründete Antwort:

Frage 2E. Für welche $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_{y=c}^d \int_{x=a}^b f(x, y) \, dx \, dy$? (Gefragt ist ein möglichst allgemeines und vielseitig anwendbares Kriterium.)

Begründete Antwort:

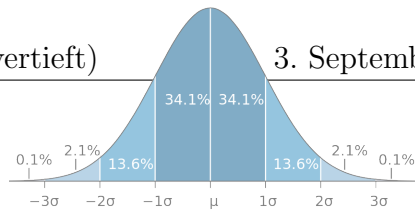
Frage 2F. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = e^{-\sin(x)^2/2}$. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f gegen $f(x)$? Konvergiert sie gleichmäßig auf $[0, 100]$?

Begründete Antwort:

Aufgabe 3. *Differentialgleichungen (10 Punkte)*

Lösen Sie die Differentialgleichung $u''(x) + u'(x) - 6u(x) = 15e^{2x}$ mit $u(0) = 1$ und $u'(0) = 0$.
(Am Ende die Probe nicht vergessen!)

Rechnung&Probe:



Aufgabe 4. *Wahrscheinlichkeit* ($4+4+4 = 12$ Punkte)

Frage 4A. Ein Zufallsexperiment mit 20% Trefferwahrscheinlichkeit wird 400 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich eine Trefferzahl zwischen 60 und 90? (Wahrscheinlichkeit in Prozent auf 1% gerundet, Tabelle zur Normalverteilung auf Seite 2)

Rechnung&Antwort:

Frage 4B. Zu einer Prüfung treten drei Typen von Teilnehmern an: 10% sind gut vorbereitet und haben Erfolgswahrscheinlichkeit 100% (Typ A), 50% sind ausreichend vorbereitet und haben Erfolgswahrscheinlichkeit 60% (Typ B), 40% sind gar nicht vorbereitet und haben Erfolgswahrscheinlichkeit 25% (Typ C). Wie groß ist nach der Prüfung der Anteil der Typen A, B, C unter allen Teilnehmern E , die erfolgreich bestanden haben? (Gefragt sind also die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|E)$, $P(B|E)$ und $P(C|E)$.)

Rechnung&Antwort:

Frage 4C. Eine Urne enthält 850 durchnummerierte Lose. Sie ziehen zufällig und unabhängig 51 mal ein Los *mit Zurücklegen*. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei 51 *verschiedene* Lose zu ziehen? (Wahrscheinlichkeit in Prozent auf 1% gerundet, Tabelle zur Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ auf Seite 2)

Rechnung&Antwort:

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssysteme* ($2+4+2+2 = 10$ Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & -6 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Frage 5A. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von A ? Zu welchem Eigenwert?

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rechnung&Antwort:

Frage 5B. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Hauptvektor 2. Stufe zum Eigenwert $\lambda = 3$?

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechnung&Antwort:

Frage 5C. Finden Sie einen weiteren Eigenvektor von A und bestimmen Sie so eine Basis des \mathbb{R}^4 bestehend aus zwei Eigenvektoren von A und einer Hauptvektorkette der Länge 2.

Basis:

Frage 5D. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Basis:

Aufgabe 6. *Fourier-Reihen* (6+3+3 = 12 Punkte)

Frage 6A. Die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch mit $g(x) = e^x$ für alle $0 \leq x < 2\pi$. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier-Reihe $g \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. (Hinweis: Das gelingt mit zweimaliger partieller Integration und geschicktem Auflösen.)

Rechnung:

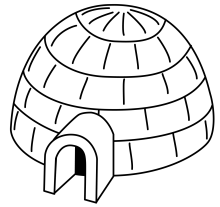
Frage 6B. Skizzieren Sie g auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$. Erklären Sie, dank welcher Kriterien die Fourier-Reihe in $x = 0$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Skizze&Antwort:

Frage 6C. Bestimmen Sie so den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}.$$

Rechnung&Antwort:

**Aufgabe 7.** *Integration und Integralsätze* (3+3+3+1 = 10 Punkte)

Ein bewohnter Iglu mit 4 Metern Durchmesser werde beschrieben durch die Menge

$$I = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0 \}.$$

Der Wärmefluss in I sei gegeben durch $f(x, y, z) = (x, y, 4z + x^2 + y^2 - 4)$.

Frage 7A: Wieviel Wärme entsteht im Iglu I insgesamt?

Frage 7B: Wieviel Wärme fließt durch den Boden B nach unten?

Frage 7C: Wieviel Wärme fließt durch die Kuppel K nach außen?

Frage 7D: Wodurch verliert dieser Iglu mehr Wärme: Kuppel oder Boden?

(Hinweise: Gesucht ist ein Volumenintegral über I und Flächenintegrale über B und K . Achten Sie auf plausible Vorzeichen. Vorgehensweise und Reihenfolge sind freigestellt.)

Rechnung&Lösung: