Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 8** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 9 – 13** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 15. 10. 2012 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **15. 10.** bis **19. 10. 2012** mit Jörg Hörner (Raum V 57.8.160) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Gegeben sei eine lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto Ax$ mit
$A = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$. Weiter sei $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.
Entscheiden Sie jeweils, ob die durch "$\cdot$" gekennzeichneten freien Stellen mit Elementen aus $\{0, 1\}$ so aufgefüllt werden können, dass die entsprechende Eigenschaft erfüllt ist. Geben Sie, wenn möglich, ein Beispiel einer solchen Matrix A an.

(a) $\operatorname{Rg}(A) = 3$

(b) $\dim \operatorname{Kern}(\alpha) = 2$

(c) $\operatorname{Rg}(A|b) = \operatorname{Rg}(A)$

(d) Die Abbildung α ist surjektiv und ihr Kern hat die Dimension zwei.

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Lösen Sie das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge an.

Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x_2^2 + 2x_1x_3 + 6x_2 + 2x_3 + 5 = 0 \right\}$$

sowie die beiden Ebenen

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = -1 \right\} \text{ und } \mathcal{E}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_2 = -1 \right\}.$$

Bestimmen Sie für die Quadriken $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q} \cap \mathcal{E}_1$ und $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q} \cap \mathcal{E}_2$, die als Schnitt der Quadrik $\mathcal{Q}$ mit $\mathcal{E}_1$ beziehungsweise $\mathcal{E}_2$ entstehen, jeweils eine euklidische Normalform und die Gestalt.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die folgenden komplexen Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^n z^n \qquad \text{und} \qquad g_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n+1} z^n$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Konvergenzkreis der Reihe $f(z)$. Skizzieren Sie den Konvergenzkreis.

(b) Finden Sie das maximale $\delta > 0$ so, dass die Reihe $f(z)$ für alle $z \in U_\delta\left(\frac{1}{9}\mathrm{i}\right)$ absolut konvergiert.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{C}$, für die der Konvergenzradius der Reihe $g_\alpha(z)$ gleich 2 ist.

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie den Funktionsgrenzwert $\lim_{x \to 1} f(x)$ für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x^5-1)(x-1)}{4x^2-8x+4}\,.$$

(b) Bestimmen Sie die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k .$$

(c) Bestimmen Sie den Häufungspunkt $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \cos\left(5n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\right) .$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(3x+y)\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Stufe von f um den Entwicklungspunkt $(0, \pi/4)$.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := (y+1)(y-x^2+2) = -x^2y - x^2 + y^2 + 3y + 2\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f und skizzieren Sie die Vorzeichenverteilung in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie Lage und Art aller kritischen Stellen von f.

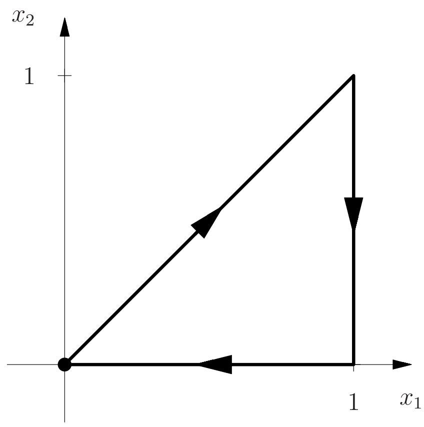
Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben ist das von dem reellen Parameter α abhängige Vektorfeld

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha x_1 x_2^2 + 6x_1^2 x_2 \\ 2x_1^3 + 8x_1^2 x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 4x_1^2 x_2^2 + 2x_1^3 x_2$$

ein Potential von f_α ist.



(b) Berechnen Sie für den abgebildeten Weg C die Integrale

$$\oint_C f_4(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad \text{und} \quad \oint_C f_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,.$$

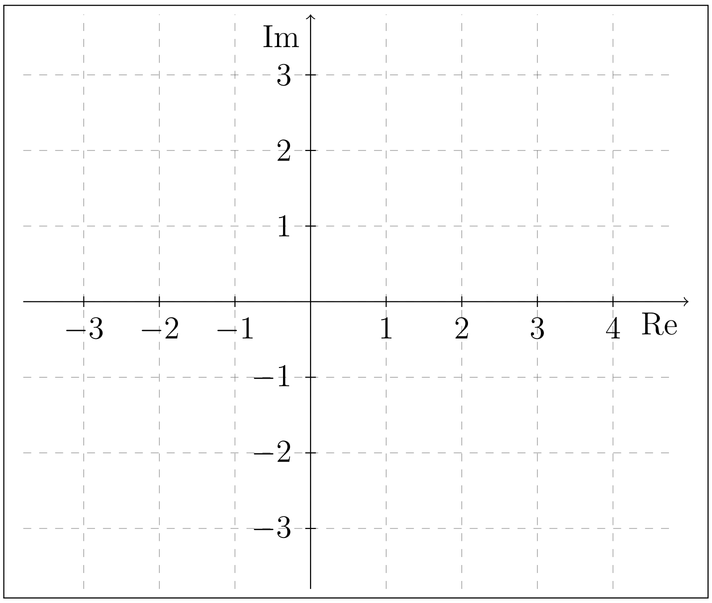
Name, Vorname: ______ **Matrikel-Nummer:** ______ **Studien-gang:** ______

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$.

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - 2 + \mathrm{i}| \leqq \frac{9}{4}\}$

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re}(z) \leqq 0 \wedge \mathrm{Im}(z) \leqq 0\}$

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}(z) = (\mathrm{Re}(z))^2\}$



Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Spur und die Determinante der Matrix A.

$\mathrm{Sp}(A) =$ ______ $\det(A) =$ ______

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix A.

$\lambda_1 =$ ______ , $V(\lambda_1) =$ ______ , $\lambda_2 =$ ______ , $V(\lambda_2) =$ ______

Aufgabe 11 (*4 Punkte*)

(a) Geben Sie $z = \dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ in Polarkoordinatendarstellung an.

Berechnen Sie $1 - \left(\dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{28} =$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $-8\mathrm{i} = z^3$ an. (Die Lösungen können in Polarkoordinatendarstellung angeben werden.)

Aufgabe 12 (*3 Punkte*) Gegeben sind im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = \left(\binom{0}{0}; \binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$ die Punkte $P = (2,1)^\intercal$, $Q = (4,2)^\intercal$ und $R = (3,3)^\intercal$. Das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; v, w)$ wird durch den Punkt P und die beiden Vektoren $v = \overrightarrow{PQ}$ und $w = \overrightarrow{PR}$ gebildet.

(a) M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$. Geben Sie die Koordinaten des Punktes M bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

$_{\mathbb{F}}M =$

(b) Die affine Abbildung α vertauscht die Punkte P, Q und R zyklisch, d.h. $\alpha(P) = Q$, $\alpha(Q) = R$ und $\alpha(R) = P$. Geben Sie die Darstellung von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

$_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) = \qquad {}_{\mathbb{F}}x +$

Aufgabe 13 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Integrale.

$$\int 2x \sin(x^2 - 3)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$\int \frac{x - 16}{x^2 + 3x - 10}\,\mathrm{d}\,x =$$

$$\int x \ln(x)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$\int_0^1 x \ln(x)\,\mathrm{d}\,x =$$
