# Klausur zur Höheren Mathematik I und II

## für die Fachrichtungen: el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 5 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **15. Oktober 2012** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

**Hinweise für Wiederholer:**

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **22. Oktober 2012** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM II–Schneider (`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Schneider-SS12/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

**Aufgabe 1** (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1 \\ x_2' &= 3x_2 + 4x_3 \\ x_3' &= 4x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems aus b) zur Anfangsbedingung

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

d) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^T A x$ mit $A$ aus a). Es ist $f(0) = 0$ und $\nabla f(0) = 0$. Liegt bei $x = 0$ ein Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

---

**Aufgabe 2** (*10 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos(n)}{n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{n^3+6}{7n^3+5n^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin(\frac{x}{2})\cdot x}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ , wobei $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$ und $x_0 = 1$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^k}{k!}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (\sqrt{3})^{-k}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \dfrac{\cos(t)}{t+2}\,\mathrm{d}t$

**Aufgabe 3** (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{1-x^4}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie unter Verwendung der geometrischen Reihe die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

c) Bestimmen Sie $f^{(100)}(0)$.

d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe.

e) Ist $x = 0$ eine lokale Extremstelle? Wenn ja, handelt es sich bei dem Extremum um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum?

---

**Aufgabe 4** (*10 Punkte*)

Gegeben seien die Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ und die Punkte $A = (1, 1, 0)$ und $B = (1, 3, 2)$.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $S$ der Geraden $g$ durch $A$ und $B$ mit der Ebene $E$.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen $E$ und $g$.

c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $B$ von $E$.

d) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene $F$, welche durch $A, B$ und den Ursprung geht.

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von $A$, $B$ und dem Ursprung aufgespannten Dreiecks.

---

**Aufgabe 5** (*10 Punkte*)

a) Geben Sie für die nachfolgenden uneigentlichen Integrale jeweils an, ob diese konvergieren oder divergieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos(3x) - 1}{5x^{5/2}}\,\mathrm{d}x$ ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)^2 + \cos(e^x)}{x^4}\mathrm{d}x$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = 1 + x(t)^2$$

mit $x(0) = 1$.

**Aufgabe 6** (*10 Punkte*)

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4xy + 2z^3 \\ 2x^2 + 6z \\ 6xz^2 + 6y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot} f = 0$.

b) Bestimmen Sie ein Potential $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f = \nabla\varphi$.

c) Bestimmen Sie $\oint_{C_1} \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle$ , wobei $C_1$ der Einheitskreis in $xy$-Ebene ist.

d) Sei $C_2$ ein beliebiger Weg von $P = (1,1,2)$ nach $Q = (3,5,0)$, Bestimmen Sie $\int_{C_2} \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle$.

e) Bestimmen Sie das Maximum von

$$f_1(x,y,z) = 4xy + 2z^3$$

auf der Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$