Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1 \\ x_2' &= 3x_2 + 4x_3 \\ x_3' &= 4x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems aus b) zur Anfangsbedingung

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

d) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^T A x$ mit A aus a). Es ist $f(0) = 0$ und $\nabla f(0) = 0$. Liegt bei $x = 0$ ein Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

Lösung:

a) Das charakteristische Polynom p_A von A ist gegeben durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 16).$$

Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch

$$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = -1.$$

Zugehörige Eigenvektoren v_i bestimmt man aus allen nichttrivialen Lösungen der homogenen LGSe $(A - \lambda_i \vdots 0)$ für $i = 1, 2, 3$. Somit erhält man z.B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Das Differentialgleichungssystem lässt sich auch schreiben als

$$x' = Ax,$$

wobei A die Matrix aus Teilaufgabe a) ist und $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$. Damit hat die allgemeine Lösung die Form

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

c) Zur Bestimmung von c_1, c_2, c_3 für die Anfangsbedingung $x(0) = (0,0,0)^\top$, muss das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelöst werden. Daraus ergibt sich sofort $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ und somit $x(t) = (0,0,0)^\top$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Alternativ: Jedes lineare Differentialgleichungssystem besitzt die triviale Lösung $x(t) = (0,0,0)^\top$. Diese erfüllt die geforderten Anfangsbedingung und muss daher nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz die gesuchte Lösung sein.

d) f ist ein Polynom vom Grad 2. Daher gilt

$$x^T Ax = f(x) = T_2(f, x, 0) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{\nabla f(0)}_{=0} x + \frac{1}{2} x^T Hf(0) x = \frac{1}{2} x^T Hf(0) x.$$

Somit ist $Hf(0) = 2A$. Da A sowohl negative als auch positive Eigenwerte besitzt, gilt dies auch für $Hf(0)$. Daher ist $Hf(0)$ indefinit und der Ursprung somit ein Sattelpunkt.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos(n)}{n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{n^3+6}{7n^3+5n^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin(\frac{x}{2})\cdot x}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, wobei $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$ und $x_0 = 1$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^k}{k!}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (\sqrt{3})^{-k}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \dfrac{\cos(t)}{t+2}\,\mathrm{d}t$

Lösung:

a) Es ist

$$0 \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} 0 \leqq \frac{1-\cos(n)}{n^2} \leqq \frac{2}{n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und daher nach dem Einschnürungssatz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos(n)}{n^2} = 0$.

b) Es gilt $\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \underbrace{\dfrac{n^3+6}{7n^3+5n^2}}_{\to \frac{1}{7}} \to \dfrac{e}{7}$ für $n\to\infty$.

c) Nach dem Satz von Taylor ist $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ und $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ für $x\to 0$. Daher ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x/2)x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+\mathcal{O}(x^4)}{\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\mathcal{O}(x^2)}{\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x^2)} = 2.$$

Alternativ:

Mit zweimaliger Anwendung der Regeln von de l'Hospitale ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(\frac{x}{2})\cdot x} &\overset{\text{Fall } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\sin(x/2)+\frac{x}{2}\cos(x/2)} \\
&\overset{\text{Fall } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)}}{\frac{1}{2}\cos(x/2)+\frac{1}{2}\cos(x/2)-\frac{x}{4}\sin(x/2)} \\
&= \frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2.
\end{aligned}$$

d) Es ist leicht zu sehen, dass $x_n = \frac{1}{2^n}$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Alternativ:

Es ist $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1$, besagt das Quotientenkriterium für Folgen, dass $\lim_{n\to\infty} = 0$ (unabhängig vom Startwert).

Alternativ:

Es ist $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1$. Damit ist die Folge monoton fallend und konvergent. Es existiert also $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$. Aus der rekursiven Definition $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$ ergibt sich durch Grenzwertbildung auf beiden Seiten die Gleichung $\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{x}$, woraus sofort folgt, dass $\bar{x} = 0$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \overset{\text{Exponentialreihe}}{=} e^2.$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (\sqrt{3})^{-k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \overset{\text{geometr. Reihe}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

g) Der Integrand $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t+2}$ ist stetig in der Nähe von $t = 0$. Mithin besitzt der Integrand also eine Stammfunktion F. Daher ist nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\cos(t)}{t+2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(F(x) - F(0)) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = \frac{\cos(0)}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ:

Da $\lim_{x\to 0} \underbrace{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}_{=:I(x)} = 0$ für Riemann-integrierbares f und I differenzierbar ist für stetiges f mit $I'(x) = f(x)$, können die Regeln von de l'Hospitale angewendet werden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{\cos(t)}{t+2}\,\mathrm{d}t}{x} \overset{\text{Fall } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{x+2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ:

Sei $f(t) := \frac{\cos(t)}{t+2}$. Dann ist nach dem Satz von Taylor $f(t) = \frac{1}{2} + f'(\tau_t)t$ für ein τ_t zwischen 0 und t. Weiter ist $|f'(t)| = \left|\frac{-\sin(t)(t+2)-\cos(t)}{(t+2)^2}\right| \leqq 2$ für alle $t \geqq -1$. Also ist

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^x f'(\tau_t)t\,\mathrm{d}t}_{=:R(x)} = \frac{1}{2} + R(x).$$

Nun ist noch zu zeigen, dass $R(x) \to 0$ für $x \to 0$. Das Integrationsintervall liegt ganz in $[-|x|, |x|]$, also gilt wegen obiger Abschätzung für f', wenn $|x| \leqq 1$

$$|R(x)| \leqq \frac{1}{|x|} \cdot |x| \cdot \sup_{t\in[-|x|,|x|]} |f'(t)| \cdot \sup_{t\in[-|x|,|x|]} |t| \leqq 2|x| \to 0$$

für $x \to 0$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{1-x^4}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie unter Verwendung der geometrischen Reihe die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

c) Bestimmen Sie $f^{(100)}(0)$.

d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe.

e) Ist $x = 0$ eine lokale Extremstelle? Wenn ja, handelt es sich bei dem Extremum um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum?

Lösung:

a) Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x^5 + 2x}{(1-x^4)^2} \\ f''(x) &= \frac{(10x^4+2)(1-x^4) + 8x^3(2x^5+2x)}{(1-x^4)^3} \end{aligned}$$

Damit ist das gesuchte Taylorpolynom gegeben durch

$$T_2(f, x, 0) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = x^2.$$

Alternativ: Das Taylorpolynom kann auch leicht direkt aus der Taylorreihe (Aufgabenteil b)) abgelesen werden, ohne die Ableitungen zu berechnen.

b) Es ist für $|x| < 1$

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^4} = x^2 \cdot \frac{1}{1-x^4} \overset{\text{geometr. Reihe}}{=} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (x^4)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k+2}.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen muss dies die Taylorreihe von f sein, also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ mit } a_n = \begin{cases} 1 & , \; n = 4k+2, \; k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & , \; \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Durch Koeffizientenvergleich der oben bestimmten Taylorreihe und der allgemeinen Form der Taylorreihe,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n,$$

ergibt sich $f^{(100)}(0) = 100! a_{100}$. Da 100 durch 4 teilbar ist, also insbesondere nicht in der Form $4k+2$ darstellbar mit $k \in \mathbb{N}_0$, gilt nach Teil b), dass $a_{100} = 0$ und somit $f^{(100)}(0) = 0$.

d) Der Konvergenzradius ρ der Taylorreihe ist gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$$

Alternativ: Es ist nach den obigen Überlegungen sofort klar, dass der Konvergenzradius der Taylorreihe genau derselbe sein muss wie der Konvergenzradius der geometrischen Reihe, also 1.

e) Da $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2 > 0$, liegt an der Stelle $x = 0$ ein Minimum vor.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Gegeben seien die Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ und die Punkte $A = (1, 1, 0)$ und $B = (1, 3, 2)$.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g durch A und B mit der Ebene E.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen E und g.

c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes B von E.

d) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene F, welche durch A, B und den Ursprung geht.

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von A, B und dem Ursprung aufgespannten Dreiecks.

Lösung:

a) Eine Parameterdarstellung der Geraden g durch A und B ist z.B. gegeben durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man sieht sofort, dass $z = 1$ genau dann, wenn $t = 1$. Also ist $S = (1, 2, 1)$.

b) Der Sinus des Schnittwinkels α ist gegeben durch den Betrag des Skalarprodukts des Normaleneinheitsvektors n von E mit dem normierten Richtungsvektor v von g. Es ist $n = (0, 0, 1)^T$ und $v = \frac{1}{2}\sqrt{2}(0, 1, 1)^T$ also

$$\arcsin(|\langle n, v\rangle|) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

D.h. $\alpha = 45^\circ$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Alternativ: Man berechnet zunächst den Winkel β zwischen dem Normalenvektor von E und dem Richungsvektor von g durch

$$\arccos\left(\frac{\langle n, v\rangle}{\|n\| \cdot \|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Damit ist $\beta = 45^\circ$ bzw. $\beta = \frac{\pi}{4}$. Und somit ist $\alpha = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

c) E ist bereits in Hesse-Normalform, daher liefert Einsetzen von B, dass $d(E, B) = 1$.

Alternativ: E besteht gerade aus den Punkten mit z-Koordinate 1. Daher ist durch geometrische Überlegungen sofort klar, dass $d(E, B) = 2 - 1 = 1$.

d) Zunächst bestimmt man eine Parameterdarstellung von F, z.B.

$$F : \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Dann ist ein Normalenvektor von F gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach Normierung erhält man den Vektor $\frac{1}{3}\sqrt{3}(1, -1, 1)^T$. Da F den Ursprung enthält, verschwindet das Absolutglied in der Hesseschen Normalform. Somit ist die Hessesche Normalform von F gegeben durch

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{3}y + \frac{1}{3}\sqrt{3}z = 0.$$

e) Der Flächeninhalt des Dreiecks OAB ist gegeben durch

$$\frac{1}{2} \| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \| \stackrel{\text{Teil d)}}{=} \sqrt{3}.$$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Geben Sie für die nachfolgenden uneigentlichen Integrale jeweils an, ob diese konvergieren oder divergieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos(3x)-1}{5x^{5/2}}\,\mathrm{d}x$ ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)^2+\cos(e^x)}{x^4}\mathrm{d}x$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = 1 + x(t)^2$$

mit $x(0) = 1$.

Lösung:

a),i) Mit Hilfe der Kosinusreihe gilt:

$$\cos(3x) - 1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{9^k}{(2k)!}x^{2k}\right) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{9^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

Damit lässt sich der Integrand schreiben als

$$\frac{\cos(3x)-1}{x^{5/2}} = -\frac{9}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + r(x),$$

wobei $r(x)$ stetig und mithin Riemann-integrierbar ist.

(Denn: $r(x) = \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x)$, mit $f_k = (-1)^k \frac{9^k}{(2k)!}x^{2k-5/2}$. Die f_k sind für $k \geqq 2$ offensichtlich stetig auf $[0,2]$. Da $\sup_{x\in[0,2]} |f_k(x)| = \frac{9^k . 4^{k+1}}{(2k)!\sqrt{2}} =: a_n$ und die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium konvergiert, konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k=2}^{\infty} f_k$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion, nämlich r.)

Damit ist

$$\int_0^2 \frac{\cos(3x)-1}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{2}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 r(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da die beiden Integral auf der rechten Seite jeweils konvergieren - $\int_0^2 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow \alpha < 1$, hier $\alpha = 1/2$, $\int_0^2 r(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, da r Riemann-integrierbar - ist das fragliche Integral konvergent.

a), ii) Es ist

$$\left|\frac{\sin(x)^2+\cos(e^x)}{x^4}\right| \leqq \frac{2}{x^4}.$$

Da $\int_1^\infty \frac{2}{x^4}\,\mathrm{d}x < \infty$, konvergiert das uneigentliche Integral nach dem Majorantenkriterium.

b) Es handelt sich um eine separierbare Differentialgleichung. Also erhält man mit Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}(s)}{1+x(s)^2} &= 1 && \Big| \int_0^t \cdot \, \mathrm{d}s \\
\arctan(x(t)) - \underbrace{\arctan(\underbrace{x(0)}_{=1})}_{=\pi/4} &= t && \big| + \pi/4 \quad \big| \tan(\cdot) \\
x(t) &= \tan(t + \pi/4)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4xy + 2z^3 \\ 2x^2 + 6z \\ 6xz^2 + 6y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot} f = 0$.

b) Bestimmen Sie ein Potential $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f = \nabla\varphi$.

c) Bestimmen Sie $\oint_{C_1} \langle f(X), \mathrm{d}X\rangle$, wobei C_1 der Einheitskreis in der xy-Ebene ist.

d) Sei C_2 ein beliebiger Weg von $P = (1,1,2)$ nach $Q = (3,5,0)$, Bestimmen Sie $\int_{C_2} \langle f(X), \mathrm{d}X\rangle$.

e) Bestimmen Sie das Maximum von

$$f_1(x,y,z) = 4xy + 2z^3$$

auf der Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Lösung:

a) Es ist

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y(6xz^2 + 6y) - \partial_z(2x^2 + 6z) \\ \partial_z(4xy + 2z^3) - \partial_x(6xz^2 + 6y) \\ \partial_x(2x^2 + 6z) - \partial_y(4xy + 2z^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ 6z^2 - 6z^2 \\ 4x - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ: Nachweisen, dass die Jacobimatrix von f symmetrisch ist.

b) Bestimmung eines Potentials φ (dieses muss existieren, da der Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist und die Rotation von f verschwindet):

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi \overset{!}{=} f \Rightarrow\ & \partial_x\varphi \overset{!}{=} 4xy + 2z^3 && \Rightarrow && \varphi(x,y,z) = 2x^2y + 2xz^3 + c_1(y,z), \\
\partial_y\varphi \overset{!}{=} 2x^2 + 6z \Rightarrow\ & 2x^2 + \partial_y c_1(y,z) \overset{!}{=} 2x^2 + 6z && \Rightarrow && \varphi(x,y,z) = 2x^2y + 2xz^3 + 6yz + c_2(z), \\
\partial_z\varphi \overset{!}{=} 6xz^2 + 6y \Rightarrow\ & 6xz^2 + 6y + c_2'(z) \overset{!}{=} 6xz^2 + 6y && \Rightarrow && \varphi(x,y,z) = 2x^2y + 2xz^3 + 6yz + c,\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Somit ist ein Potential von f z.B. gegeben durch $\varphi(x,y,z) = 2x^2y + 2xz^3 + 6yz$.

c) Da f ein Potential besitzt, verschwindet das Kurvenintegral 2. Art über jeder geschlossenen Kurve, d.h. $\oint_{C_1} \langle f(X), \mathrm{d}X\rangle = 0$.

d) Da f ein Potential besitzt, ist

$$\int_{C_2} \langle f(X), \mathrm{d}X \rangle = \varphi(3,5,0) - \varphi(1,1,2) = 90 - (2 + 16 + 12) = 60.$$

e) Da $z = 0$ gefordert ist, genügt es, das Maximum von $g(x,y) = 4xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ zu bestimmen. Zum Beispiel mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren. Dann gilt es, kritische Punkte von $G(x,y;\lambda) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ zu finden.

$$\begin{aligned}
\partial_x G(x,y;\lambda) &= 4y + 2x\lambda &&\overset{!}{=} 0,\\
\partial_y G(x,y;\lambda) &= 4x + 2y\lambda &&\overset{!}{=} 0,\\
\partial_\lambda G(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 1 &&\overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Durch Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten ergibt sich $4x - 4y + 2y\lambda - 2x\lambda = 2(x - y)(2 - \lambda) = 0$. Damit sind zwei Fälle zu untersuchen:

- Fall 1: $x = y$

  Dann liefert Einsetzen in die dritte Bedingung, dass $2x^2 = 1$, also $x = y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- Fall 2: $\lambda = 2$

  Dann erhält man aus der ersten Zeile, dass $4y + 4x = 0$, also $x = -y$. Durch Einsetzen in die dritte Bedingung ergibt sich $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Setzt man nun die kritischen x- und y-Werte in die Zielfunktion g ein, so ergibt sich

$$g(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2) = 2, \quad g(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2) = -2.$$

D.h. das gesuchte Maximum ist 2.

Alternativ: Parametrisierung des Einheitskreises durch z.B. $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ und Reduktion auf ein eindimensionales Optimierungsproblem $g(c(t)) = 4\cos(t)\sin(t)$ auf $[0, 2\pi]$.

Kritische Punkte bestimmen: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(c(t)) = 4(\cos^2(t) - \sin^2(t)) \overset{!}{=} 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $|\cos(t)| = |\sin(t)|$, also für $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{3}{4}\pi$, $t_3 = \frac{5}{4}\pi$, $t_4 = \frac{7}{4}\pi$. Dann ist $g(c(t_{1/3})) = 2$, $g(c(t_{2/4})) = -2$. Da für die Randwerte $g(c(0)) = g(c(2\pi)) = 0 < 2$ gilt, ist 2 das gesuchte Maximum.

Alternativ: Parametrisierung des Einheitskreises durch zwei Kurvenstücke: $c_\pm : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $c_\pm(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ und Reduktion auf zwei eindimensionale Optimierungsprobleme $g(c_\pm(x)) = \pm 4x\sqrt{1-x^2}$ auf $[-1,1]$.

Kritische Punkte bestimmen: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(c_\pm(x)) = \pm\left(4\sqrt{1-x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) \overset{!}{=} 0$. Dies liefert jeweils die kritischen Stellen $x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Damit ist $g(c_\pm(-\sqrt{2}/2)) = \mp 2$ und $g(c_\pm(\sqrt{2}/2)) = \pm 2$. Da für die Randwerte $g(c_\pm(-1)) = g(c_\pm(1)) = 0$ gilt, ist 2 das gesuchte Maximum.