Klausur

für bau, ernen, fmt, medtech, geod, mach, tema, umw, IuI, verf

Hinweise:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig**.
- Erlaubte Hilfsmittel: 4 eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.**
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich in der Woche vom 15. bis zum 19. Oktober 2012 statt. Details hierzu werden auf der Internet-Seite zur Veranstaltung bekanntgegeben. http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr-WS1112/
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab dem 08. Oktober 2012 über das Online-Portal LSF der Universität Stuttgart erfragt werden. https://lsf.uni-stuttgart.de/

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.

Hinweis im Falle einer Wiederholungsprüfung
Falls diese Prüfung für Sie eine Wiederholungsprüfung ist, so ist für bestimmte Fachrichtungen in dieser Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung eingeschlossen, wenn das Ergebnis des schriftlichen Teils schlechter als die Note 4,0 ausfällt.

Wird in Ihrem Fall eine mündliche Nachprüfung erforderlich, so müssen Sie am Montag, dem 23. Oktober, von 14 bis 18 Uhr bei Herrn Keller, Zimmer V57.8.157, **persönlich** einen Termin dafür vereinbaren. Eine individuelle Benachrichtigung erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und mit dem **Prüfungsamt** zu klären, ob Sie Anrecht auf eine mündliche Nachprüfung haben.

Mit der Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtung an.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Rotiert man die Menge
$$\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2\pi, z = \cos y\}$$
um die z-Achse, so ensteht die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Zirkulation von
$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x,y,z) = (-\frac{y}{4\pi^2}, 0, 0)^\top$$
längs des Flächenrandes von F.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Es sei der Normalbereich
$$\overline{V} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq \sin(x^2)\}$$
sowie
$$g : \mathbb{R}^2 \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x,y,z) = (x^2, -2xy, \arcsin(z))^\top$$
gegeben. Bestimmen Sie den Ausfluss von g durch den Rand von $\overline{V}$.
Hinweis: Sie dürfen
$$\frac{d}{dt}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in (-1,1),$$
verwenden.

Aufgabe 3: *(10 Punkte)*
Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Systems
$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung
$$y'' - 4y' = \sin(4x) - 4x.$$

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*
Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

(a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourier-Reihe.
Hinweis: Ausdrücke der Form $\sin(j\frac{\pi}{2})$ und $\cos(j\frac{\pi}{2})$, $j \in \mathbb{N}_0$, müssen ausgerechnet werden.

(b) Geben Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ an gegen welche Wert die Fourier-Reihe von f im Punkte x konvergiert.

(c) Besitzt f eine 2π-periodische Stammfunktion? Falls ja, geben Sie ihre Fourierreihe an.