# Lösungsvorschläge zur Klausur
**für bau, ernen, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf**

**Aufgabe 1:** *(6 Punkte)*
Rotiert man die Menge

$$\left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2\pi, z = \cos y\right\}$$

um die $z$-Achse, so ensteht die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Zirkulation von

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x,y,z) = (-\frac{y}{4\pi^2}, 0, 0)^\top$$

längs des Flächenrandes von $F$.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:**
**1. Variante: Mit Stokes**

Mi dem Satz von Stokes gilt für die Zirkulation längs des Randes $\partial F$ von $F$:

$$Z(g, \partial F) = \iint_F \operatorname{rot} g \cdot n dO.$$

Eine reguläre Parametriesierung von $F$ wird z.B. durch

$$\Phi : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \cos r)^\top$$

gegeben. Damit ist

$$\Phi_r(r,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -\sin r)^\top, \quad \Phi_\varphi(r,\varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)^\top$$
$$\Phi_r \times \Phi_\varphi(r,\varphi) = (r\sin r\cos\varphi, r\sin r\sin\varphi, r)^\top$$

und

$$\operatorname{rot} g(\Phi(r,\varphi)) = (0,0,\frac{1}{4\pi})^\top.$$

Somit

$$\begin{aligned}
Z(g,\partial F) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (0,0,\frac{1}{4\pi^2})^\top \cdot (r\sin r\cos\varphi, r\sin r\sin\varphi, r)^\top dr d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r dr d\varphi \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} r^2 \big|_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

**2. Variante: Direkt über den Rand**

Der Rand $\partial F$ von $F$ ist ein in der Ebene $z = 1$ gelegener Kreis mit Radius $2\pi$.
Eine positiv orientierte Parametrisierung von $\partial F$ erhalten wir somit durch

$$C_{\partial F} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad C_{\partial F}(t) = (2\pi \cdot \cos t, 2\pi \cdot \sin t, 1)^\top.$$

Per Definition ist die Zirkulation von $g$ längs $\partial F$ das Wegintegral über $\partial F$ :

$$Z(g, \partial F) = \int_{\partial F} g(s)ds = \int_0^{2\pi} g(C_{\partial F}(t)) \cdot C'_{\partial F}(t)dt.$$

Da

$$g(C_{\partial F}(t)) = (-\frac{\sin t}{2\pi}, 0, 0)\top$$
$$C'_{\partial F}(t) = (-2\pi \sin t, 2\pi \cos t, 0)^\top$$

folgt

$$Z(g, \partial F) = \int_0^{2\pi} sin^2 t dt = -\frac{1}{2}\sin t \cos t + \frac{t}{2} \,|_0^{2\pi} = \pi.$$

**Aufgabe 2:** *(5 Punkte)*
Es sei der Normalbereich

$$\overline{V} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x^2, 0 \le z \le \sin(x^2)\right\}$$

sowie

$$g : \mathbb{R}^2 \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x,y,z) = (x^2, -2xy, \arcsin(z))^\top$$

gegeben. Bestimmen Sie den Ausfluss von $g$ durch den Rand von $\overline{V}$.
**Hinweis:** Sie dürfen

$$\frac{d}{dt}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in (-1,1),$$

verwenden.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:**
Es ist $0 \le \sin(x^2) \le 1$ für $-1 \le x \le 1$. Die Menge

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x^2, z = 0\right\}$$

ist somit ein zweidimensionaler Normalbereich und die gegebene Menge $\overline{V}$ ein Normalbereich bezüglich der $(x,y)$-Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Nach dem Gausschen Satz ist der Ausfluss

$$A(g,\overline{V}) = \iiint_{\overline{V}} \operatorname{div} g(x,y,z) dxdydz.$$

Mit

$$\operatorname{div} g(x,y,z) = 2x - 2x + \frac{\partial}{\partial z}\arcsin(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

und den obigen Überlegungen ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
A(g,\overline{V}) &= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{1-x^2}\int_{z=0}^{\sin(x^2)} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dzdydx. \\
&= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{1-x^2} \arcsin(z) \,|_0^{\sin(x^2)}\, dydx \\
&= \int_{x=-1}^{1} x^2 y \,|_0^{1-x^2}\, dx \\
&= \int_{x=-1}^{1} x^2 - x^4 dx = 2\left(1/3x^3 - 1/5x^5 \,|_0^1\right) \\
&= 2 \cdot (1/3 - 1/5) = 4/15.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3:** *(10 Punkte)*
Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Systems

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:**
Für die **Lösung des homogenen Systems** ermitteln wir (analog zu 6.4.5) ein Fundamentalsystem. Dazu berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom der Matrix:

$$\chi(X) = (2-X)(6-X)+4 = X^2 - 8X + 16 = (X-4)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = 4$. Damit lautet das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung

$$g_1(x) = e^{4x}, \quad g_2(x) = x e^{4x}.$$

Für die zugehörige Wronskimatrix und ihre Inverse in 0 ergibt sich

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & x e^{4x} \\ 4e^{4x} & (4x+1)e^{4x} \end{pmatrix}, \quad M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(0)^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von dem ersten Einheitsvektor $e_1$ erhalten wir die linear unabhängigen Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Lösung des homogenen Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = e_1$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4x} \\ x e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Das zweite Element des Fundamentalsystems erhalten wir

**Variante 1: durch Ableiten von $f_1$**

$$f_2(x) = f_1'(x) = \begin{pmatrix} 2-8x \\ 4x+1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems gegeben durch

$$f_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \begin{pmatrix} 2-8x \\ 4x+1 \end{pmatrix} e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für die **Bestimmung einer partikulären Lösung** verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten, der auf das folgende Gleichungssystem führt:

$$e^{4x}\begin{pmatrix}(1-2x) & (2-8x)\\ x & (4x+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{pmatrix}=e^{4x}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

Umformen ergibt

$$\begin{pmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(4x+1) & -(2-8x)\\ -x & (1-2x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix},$$

was auf $c_1(x)=-4x$, $c_2(x)=x$ und damit auf die partikuläre Lösung

$$f_p(x)=-4x\begin{pmatrix}1-2x\\ x\end{pmatrix}e^{4x}+x\begin{pmatrix}2-8x\\ 4x+1\end{pmatrix}e^{4x}$$

$$=\begin{pmatrix}-4x+8x^2+2x-8x^2\\ -4x^2+4x^2+x\end{pmatrix}e^{4x}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}xe^{4x}$$

führt. Die allgemeine Lösung ist dann durch $f_h+f_p$ gegeben:

$$f(x)=c_1\begin{pmatrix}1-2x\\ x\end{pmatrix}e^{4x}+c_2\begin{pmatrix}2-8x\\ 4x+1\end{pmatrix}e^{4x}+\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}xe^{4x},\quad c_1,\,c_2\in\mathbb{R}.$$

**Variante 2: $f_2$ mittels Eigenvektor:** man bestimmt einen Eigenvektor zum Eigenwert 4 und bestimmt damit die 2. Grundlösung zu

$$f_2(x)=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}e^{4x}.$$

Dann weiter wie oben aber mit geänderten Zahlen: Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems gegeben durch

$$f_h(x)=c_1\begin{pmatrix}1-2x\\ x\end{pmatrix}e^{4x}+c_2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}e^{4x},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Für die **Bestimmung einer partikulären Lösung** verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten, der auf das folgende Gleichungssystem führt:

$$e^{4x}\begin{pmatrix}(1-2x) & -2\\ x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{pmatrix}=e^{4x}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

Umformen ergibt

$$\begin{pmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -x & (1-2x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

was auf $c_1(x) \equiv 0$, $c_2(x) = x$

und damit auf die partikuläre Lösung

$$f_p(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{4x}$$

führt. Die allgemeine Lösung ist dann durch $f_h + f_p$ gegeben:

$$f(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^{4x} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{4x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 4:** *(10 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' = \sin(4x) - 4x.$$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:**

1. **Berechnung der Lösung $y_h$ der homogenen Gleichung.** Das charakterischtische Polynom der Differentialgleichung lautet

$$p(X) = X^2 - 4X = X\,(X-4),$$

also lauten die Grundlösungen $g_1$ und $g_2$ und die allgemeine Lösung $y_h$ der homogenen Gleichung wie folgt:

$$g_1(x) = e^{4x},\ g_2(x) = e^{0x} \equiv 1, \quad y_h(x) = c_1\, e^{4x} + c_2, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Berechnung einer Partikulärlösung $y_p$ der inhomogenen Gleichung.**

**Ansatz nach Art der rechten Seite**

Ausnutzen des Superpositionsprinzips, das heißt, $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ mit

$$y''_{p,1}(x) - 4y'_{p,1}(x) = \sin(4x) \text{ und } y''_{p,2}(x) - 4y'_{p,2}(x) = 4x.$$

**zu $y_{p,1}$:** Ansatz $y_{p,1}(x) = \Im(ze^{4ix})$ mit einer Konstanten $z \in \mathbb{C}$ liefert

$$-16z - 16iz \overset{!}{=} 1 \iff z = -\frac{1}{16}\,\frac{1}{1+i} = -\frac{1}{16}\,\frac{1-i}{2} = \frac{1}{32}(i-1).$$

Also:

$$\begin{aligned} y_{p,1}(x) &= \Im\big(\frac{1}{32}(i-1)\,(\cos(4x) + i\sin(4x)\big) \\ &= \frac{1}{32}\Im\big(-\cos(4x) - \sin(4x) + i\,(\cos(4x) - \sin(4x))\big) \\ &= \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32}. \end{aligned}$$

**Alternative zu $y_{p,1}$ *ohne* komplexe Zahlen:** Dann lautet der Ansatz natürlich $\tilde{y}_{p,1}(x) = c\cos(4x) + s\sin(4x)$, zugehörige zweite Ableitungen:

$$\tilde{y}'_{p,1}(x) = 4\,(-c\sin(4x) + s\cos(4x)), \quad \tilde{y}''_{p,1}(x) = -16\,(c\cos(4x) + s\sin(4x)).$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} -16\,\Big(c\cos(4x) + s\sin(4x) - c\sin(4x) + s\cos(4x)\Big) &\overset{!}{=} \sin(4x) \\ \iff \quad -16\cos(4x)\,(s+c) + 16\sin(4x)\,(c-s) &= \sin(4x) \\ \iff \quad s = -c \text{ und } c &= \frac{1}{32}, \end{aligned}$$

also

$$\tilde{y}_{p,1}(x) = y_{p,1}(x) = \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32}.$$

**zu** $y_{p,2}$: Resonanzfall, Ansatz also $y_{p,2}(x) = x(\alpha x + \beta)$, das heißt:

$$y_{p,2}(x) = \alpha x^2 + \beta x, \quad y'_{p,2}(x) = 2\alpha x + \beta, \quad y''_{p,2}(x) = 2\alpha.$$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert

$$2\alpha - 8\alpha x - 4\beta \stackrel{!}{=} -4x \iff \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 2\beta \iff \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{4}.$$

Also erhält man $y_{p,2}(x) = (2x^2 + x)/4$.

Insgesamt ist dann

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32} + \frac{2x^2 + x}{4}.$$

**Alternativweg: Variation der Konstanten** Ansatz $y_p(x) = c_1(x)\, e^{4x} + c_2(x)$. Wronski-Matrix $M(x)$ zu den Grundlösungen:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & 1 \\ 4e^{4x} & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = -\frac{1}{4} e^{-4x} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4e^{4x} & e^{4x} \end{pmatrix},$$

Differentialgleichungen für die „Konstanten“:

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} e^{-4x} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4e^{4x} & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(4x) - 4x \end{pmatrix}$$

Umformen liefert

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-4x}(\sin(4x) - 4x) \\ -\sin(4x) + 4x. \end{pmatrix}$$

Integration liefert als Stammfunktionen z.B.

$$c_1(x) = \frac{8x + 2 - \cos(4x) - \sin(4x)}{32} e^{-4x},$$

$$c_2(x) = \frac{2\cos(4x) + 16x^2}{32},$$

was dann hier auf die folgende Partikulärlösung $\tilde{y}_p$ führt:

$$\tilde{y}_p(x) = c_1(x)\, e^{4x} + c_2(x) = \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32} + \frac{2x^2 + x}{4} + \frac{1}{16} = y_p + \frac{1}{16}.$$

3. **Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.** Die Gesamtlösung $y(x)$ ist also

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{\cos(4x) - \sin(4x)}{32} + \frac{2x^2 + x}{4} + c_1 e^{4x} + c_2,$$

mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 5:** *(9 Punkte)*
Gegeben ist die $2\pi$-periodische Funktion $f$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

**(a)** Entwickeln Sie $f$ in eine reelle Fourier-Reihe.
**Hinweis:** Ausdrücke der Form $\sin(j\frac{\pi}{2})$ und $\cos(j\frac{\pi}{2})$, $j \in \mathbb{N}_0$, müssen ausgerechnet werden.

**(b)** Geben Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ an gegen welche Wert die Fourier-Reihe von $f$ im Punkte $x$ konvergiert.

**(c)** Besitzt $f$ eine $2\pi$-periodische Stammfunktion? Falls ja, geben Sie ihre Fourierreihe an.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:**

**(a)** Es ist $b_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}$ da $f(x)$ gerade ist.

Für $j \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(jx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(jx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin(jx)}{j} \Big|_0^{\pi/2} \right) \\ &= \frac{2 \cdot \sin(\frac{j\pi}{2})}{\pi j} \end{aligned}$$

Durch eine Fallunterscheidung erhalten wir somit:

$$a_j = \frac{2}{\pi j} \cdot \begin{cases} 0, & \text{für} \quad j = 2k, \\ +1, & \text{für} \quad j = 4k-3, \\ -1, & \text{für} \quad j = 4k-1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Es fehlt noch der Fall $j = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{2}{\pi} [x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Somit ist

$$f(x) \sim \mathscr{F}_f(x) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\cos((4k-3)x)}{(4k-3)\pi} - \frac{\cos((4k-1)x)}{(4k-1)\pi} \right).$$

**(b)** $f$ ist auf $[-\pi, \pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}$ stetig und macht an den Stellen $\pm\frac{\pi}{2}$ einen Sprung der Höhe 1. Somit konvergiert die Fourierreihe $\mathscr{F}_f(x)$ für $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}$ gegen $f(x)$ und in den Punkten $x_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ ist

$$\mathscr{F}_f(x_0) = \frac{1}{2}(\lim_{x \to x_0+0} f(x) + \lim_{x \to x_0-0} f(x)) = \frac{1}{2}.$$

**(c)** Da $a_0 \neq 0$ kann keine periodische Stammfunktion von $f$ existieren.