Klausur zur Höheren Mathematik 3

für **kyb, mecha, phys, Dipl el**

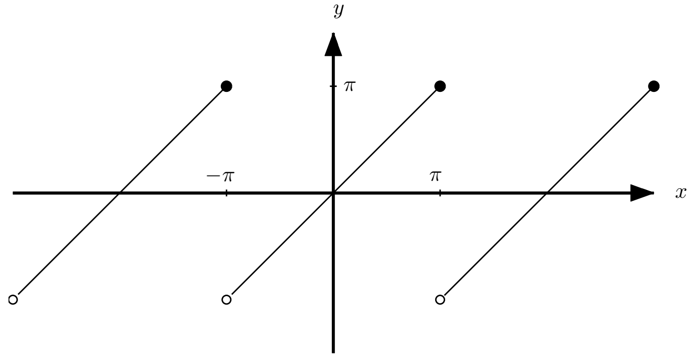
Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 20 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 5 – 8** werden nur die Ergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 16. 11. 2012 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **19. 11.** bis **21. 11. 2012** mit **K. Sanei Kashani** (Raum V 57.8.529) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch folgenden Graphen gegeben.



a) Geben Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe von f an.

b) Geben Sie an, in welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ die Fourierreihe gegen die Funktion f konvergiert.

c) Bestimmen Sie durch Einsetzen von einem geeigneten x in die Fourierreihe von f den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Aufgabe 2 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y(x) - \frac{1}{\cos(2x)} = 1, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Wie lautet hier die Grundlösung?

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten oder der Green'schen Funktion eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.
(Hinweis: Die Identität $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$ könnte nützlich sein!)

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Gegeben sei die partiellen Differentialgleichung

$$y u_{xx} = u_y.$$

a) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Differentialgleichung, die die Form $u(x,y) = v(x)w(y)$ besitzen.

b) Bestimmen Sie alle nichttriviale Lösungen der Form $u(x,y) = v(x)w(y)$, die die Bedingungen $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ erfüllen.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Fläche S wie abgebildet.

a) Geben Sie eine Parametrisierung von S und von ∂S an.

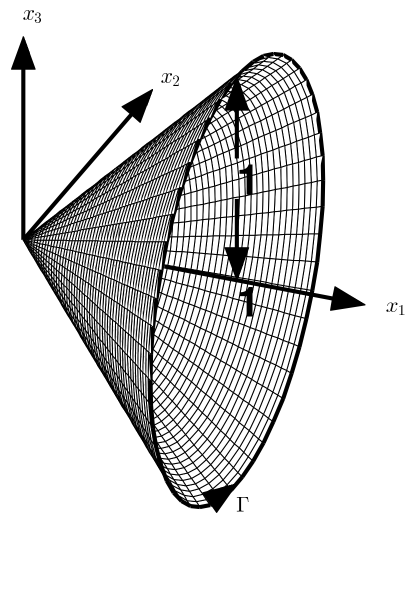
b) Geben Sie ein Vektorfeld $\vec{n}(u,v)$ an, das auf der Fläche S ohne den Ursprung senkrecht steht.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial S} g\, dx$$

mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes für das Vektorfeld

$$g(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ x_2x_3 - x_1x_2 + x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 \end{pmatrix}.$$



Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten

und die zugehörigen Eigenräume sind

Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems an:

$Y_{hom}(x) =$

b) Geben Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems an:

$$Y' = AY + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

$Y_{inh}(x) =$.

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Gegeben sei der Körper K

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leqq x^2 + y^2 \leqq 4, \quad 0 \leqq x, \quad 0 \leqq z \leqq 2\}$$

und das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy\cos(y^2) - 2z \\ -\sin(y^2) + 3z^2 \\ \sin(y^2) + 2z^2 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie den Körper K mit Hilfe von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) dar.

$$\mathrm{K} = \boxed{}\,.$$

b) Berechnen Sie das Volumen V von K.

$$\mathrm{V} = \boxed{}$$

c) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes f.

$$\operatorname{div} f = \boxed{}$$

d) Geben Sie mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes an, wie der Fluss durch die Oberfläche von K (von innen nach außen) durch ein Dreifachintegral dargestellt werden kann.

$$\int\int_{\partial K} f \cdot n d\sigma = \boxed{}$$

e) Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche von K (von innen nach außen).

$$\int\int_{\partial K} f \cdot n d\sigma = \boxed{}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 7 (*10 Punkte*) Gegeben ist die komplexwertige Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Pole von f.

b) Berechnen Sie an jedem Pol das Residuum von f.

c) Sei K_r in der komplexen Zahlenebene der positiv orientierte Kreis um $-2i$ mit Radius r. Berechnen Sie

$$I_2 = \oint_{K_2} f(z)\,dz \quad \text{und } I_4 = \oint_{K_4} f(z)\,dz.$$

$I_2 =$ $\qquad$ $I_4 =$.

d) Für $R \geqq 3$ bezeichne in der oberen Halbebene H_R den Halbkreis um 0 vom Radius R, der von R nach $-R$ im positiven Sinn durchlaufen werde. Zeigen Sie:

$$\lim_{R\longrightarrow\infty} \int_{H_R} f(z)dz \;=\; 0.$$

e) Bezeichne D_R den durch die Strecke von $-R$ nach R abgeschlossenen Halbkreis H_R, der positiv orientiert sei. Berechnen Sie für $R \geqq 3$

$$\oint_{D_R} f(z)dz =$$

f) Bestimmen Sie

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^3}dx =$$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*)

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'' - 3y' = 0.$$

$y_{hom}(x) =$ $\boxed{}$

b) Wie lautet die Laplace-Transformierte mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$?

$\mathcal{L}(u)(s) =$ $\boxed{}$

c) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' = (2x + 1)e^{3x}$$

und geben Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung an.

$y(x) =$ $\boxed{}$