Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 8** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 9 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 08. 04. 2013 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **08. 04.** bis **11. 04. 2013** mit Oussama Alaya (Raum PWR 5a.2.003) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Geraden

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei U der reelle Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, der von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

(a) Welche der gegebenen Geraden liegen in U?

(b) Liegt die Menge $A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4},\, y \in \mathbb{R},\, z = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} \right\}$ in U?

Aufgabe 2 (*8 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon\ (1, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-1)\ln(2x-2) - x + 1\,.$$

(a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für $k > 1$ ist

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k-2)!}{(x-1)^{k-1}}.$$

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 2)$ von f an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 - 8\sqrt{5}x_1 - 4\sqrt{5}x_2 + 49 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben seien zwei reelle Zahlen x, y. Für welche Werte von x und y ist das Produkt von x und y am größten, wenn man voraussetzt, dass die Summe der Quadrate von x und y konstant 4 ist?

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle Matrizen X mit reellen Koeffizienten, die die Gleichung

$$A\,X = B$$

erfüllen, wobei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int (\sin(x))^2 \cos(x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}(x^2-1)\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

(a) Führen Sie für $\dfrac{1}{k(k-1)}$ die Partialbruchzerlegung durch.

(b) Nun betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}.$$

Berechnen Sie den Wert der n-ten Partialsumme.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe aus Aufgabenteil (b) konvergiert. Bestimmen Sie den Wert, gegen den sie konvergiert.

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

(a) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die der Bedingung

$$1 \leqq |z-2+2\mathrm{i}| \leqq 2\sqrt{2}$$

genügen.

(b) Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$|z-4-6\mathrm{i}| = |z+2-4\mathrm{i}|.$$

Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass die Lösungsmenge auch beschrieben wird als

$$\{x+\mathrm{i}y \mid \ x, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}\,.$$

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studiengang:**

Aufgabe 9 (*2 Punkte*) Entscheiden Sie, welche der nachstehenden Folgerungen wahr sind für alle möglichen Wahlen der Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, und tragen Sie „wahr“ oder „falsch“ ein.

(a) Falls $c \in \mathrm{L}(a, b)$, so gilt:

$a \in \mathrm{L}(c)$

a, b, c sind linear abhängig

$a \in \mathrm{L}(b, c)$

(b) Falls $\langle a|b\rangle = \langle b|c\rangle = \langle c|a\rangle = 0$ und $\det(a, b, c) \neq 0$ erfüllt ist, so gilt:

a, b, c ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$

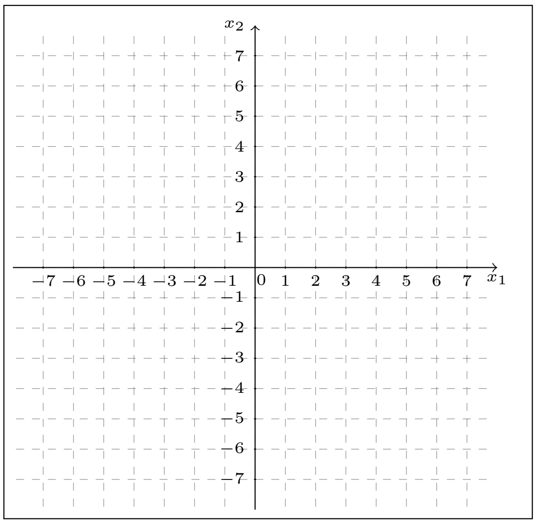
$c, a \times b$ sind linear abhängig

a, b, c ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 10 (*6 Punkte*) Es sei $K \subsetneqq \mathbb{R}^2$ der Kreis um den Mittelpunkt $M = (2, 3)$, auf dem die beiden Punkte $P_1 = (5, 6)$ und $P_2 = (-1, 6)$ liegen.

(a) Bestimmen Sie den Radius r des Kreises K: $r =$

Skizzieren Sie K:



(b) Parametrisieren Sie den kürzesten Kreisbogen $B \subsetneqq K$, der P_1 mit P_2 verbindet.

(c) Bestimmen Sie für die Kurve B aus Teil (b) das Kurvenintegral $\displaystyle\int_B 1 \,\mathrm{d}\, s =$

(d) Bestimmen Sie für die Kurve B aus Teil (b) und die reellwertige Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{(x_1-2)^2 + (x_2-3)^2}$$ das Kurvenintegral $\displaystyle\int_B f(s) \,\mathrm{d}\, s =$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Geben Sie für die unten genannten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils den größten und kleinsten Häufungspunkt an. Entscheiden Sie außerdem, ob die Folge konvergiert. Tragen Sie in der Spalte Grenzwert entweder „divergent" oder den jeweiligen Grenzwert ein.

	$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$	$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$	Grenzwert
$a_n = (-1)^n\left(2+\frac{1}{n}\right)$			
$a_n = \frac{n}{n+1}\left((-1)^n+2\right)$			
$a_n = 3+\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$			
$a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$			

Aufgabe 12 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie die (möglicherweise komplexen) Eigenwerte folgender Matrizen und bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$