Klausur zur Höheren Mathematik I und II

für die Fachrichtungen: el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 5 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **8. April 2013** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **15. April 2013** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM II–Schneider (`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Schneider-SS12/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1' &= 6x_1 + x_3 \\ x_2' &= 2x_2 \\ x_3' &= x_1 + 6x_3 \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems aus b) zur Anfangsbedingung

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1.$$

d) Bestimmen Sie A^{100}.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^9)}{\sqrt{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+6}{6n^3+5n^2} \cdot \dfrac{12^n}{27^n}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1+x} - e}{x \tanh(x+5)}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, wobei $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} - 1$ und $x_0 = 1$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(k+1)!}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin(t^2)}{\sqrt{26+t^3}}\, \mathrm{d}t$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Sinus-Reihe die Taylorreihe der Funktion $f(x) = x \sin x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie $f^{(10)}(0)$ und $f^{(2013)}(0)$.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe.

d) Ist $x = 0$ eine lokale Extremstelle? Wenn ja, handelt es sich bei dem Extremum um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum?

e) Skizzieren Sie f für $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

a) Konstruieren Sie für den Untervektorraum, der durch die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird, eine Orthonormalbasis und ergänzen Sie diese zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie den Radius und den Mittelpunkt der Sphäre

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 8x_3 + 16 = 0\}.$$

c) Bestimmen Sie den Abstand des Untervektorraumes aus a) und der Sphäre aus b).

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Geben Sie für die nachfolgenden uneigentlichen Integrale jeweils an, ob diese konvergieren oder divergieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{4x} - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{(1 + x^2)e^x}\mathrm{d}x$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x^2 - 3x + 2$$

mit $x(0) = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf der Menge

$$M = \{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 = 1\},$$

welche vom Ursprung minimalen Abstand besitzen.

b) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(x, y) = ye^x - x^2 e^y,$$

sowie die Gleichungen der Tangenten an die implizit definierte Kurve $C = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ in den Punkten $P_1(0, 0)$ und $P_2 = (1, 1)$.