Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Fläche, welche durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 2 - x^2$ eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie $\iint\limits_{\{x^2+y^2 \leqq 1\}} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}(x,y)$ durch Einführen von Polarkoordinaten.

c) Berechnen Sie $\iiint\limits_K xy \,\mathrm{d}(x,y,z)$ für $(x,y,z) \in K$ mit $K = [0,1] \times [0,3] \times [0,10]$.

d) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Platte $P = \{(x,y) \mid y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ bei konstanter Dichte ρ_0.

Lösung:

(a) Das gesuchte Flächenstück hat den Inhalt

$$\int_{-1}^{1} [(2-x^2) - x^2] \,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

(b) Nach Einführung von Polarkoordinaten $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gilt mit der Transformationsregel

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leqq 1} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot \underbrace{r}_{\text{Funktionaldeterminante}} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 e^{-r^2} r \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^1 = \pi\left(1 - e^{-1}\right).\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\iiint\limits_K xy \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{10}\int_0^3\int_0^1 xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x \cdot \int_0^3 y \,\mathrm{d}y \cdot \int_0^{10} 1 \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 10 = \frac{45}{2}.$$

(d) Die Koordinaten $(x_S, y_S)^\top$ des Schwerpunktes mit Dichtefunktion $\rho(x,y) \equiv \rho_0$ sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \frac{1}{\iint_P \rho_0 \,\mathrm{d}(x,y)} \iint_P \rho_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y).$$

P ist der Halbkreis um 0 mit Radius 1 in der oberen Halbebene. Daher ist

$$\rho_0 \iint_P 1 \,\mathrm{d}(x,y) = \rho_0 \cdot (\text{Flächeninhalt von } P) = \frac{\pi}{2}\rho_0.$$

Damit ist unter Verwendung von Polarkoordinaten

$$x_S = \frac{2}{\pi} \iint_P x \,\mathrm{d}(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi r\cos(\varphi) \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^1 \cdot [\sin(\varphi)]_0^\pi = 0,$$

$$y_S = \frac{2}{\pi} \iint_P y \,\mathrm{d}(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi r\sin(\varphi) \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^1 \cdot [-\cos(\varphi)]_0^\pi = \frac{4}{3\pi}.$$

Bemerkung: Dass $x_S = 0$ kann auch sofort aus der Symmetrie der Menge P zur y-Achse gefolgert werden.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Gegeben seien das Vektorfeld $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Körper $K = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \text{ und } z \geqq 0\}$.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$.

b) Bestimmen Sie den Durchfluss $\int_B \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma$ durch den Boden

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4 \text{ und } z = 0\}.$$

c) Bestimmen Sie den Durchfluss $\int_D \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma$ durch den Deckel

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ und } z \geqq 0\}.$$

d) Sei $g = \begin{pmatrix} e^x \\ x + y^9 \\ \cos z \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} g$ und das Wegintegral $\oint_C \langle g, \mathrm{d}x\rangle$ zweiter Art, wobei $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ und } z = 0\}$.

Hinweis: Einige Aufgabenteile vereinfachen sich bei Verwendung von Integralsätzen erheblich.

Lösung:

Bemerkung: In den Aufgabenteilen **b)** und **c)** ist keine Orientierung der Flächen B und D vorgegeben, d.h. für die Wahl von n stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung, nämlich $n = \pm\nu$, wenn ν den bezüglich K nach außen weisende Normalenvektor bezeichnet. Ebenso ist die Durchlaufrichtung von C in Aufgabenteil **d)** frei wählbar. Die Ergebnisse unterscheiden sich dann jeweils nur durch das Vorzeichen. Beide Möglichkeiten sind jeweils korrekt.

(a) Es ist $\operatorname{div} f = 0$ und $\operatorname{rot} f = (0, 0, 0)^\top$.

(b) Mit obiger Bemerkung haben wir

$$\int_B \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_B \langle f, \pm\nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_B \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = \pm \int_B 1 \,\mathrm{d}\sigma = \pm 4\pi,$$

da B ein Kreis mit Radius 2 in der x, y-Ebene ist und somit den Flächeninhalt 4π besitzt.

Alternativ:

Wir parametrisieren B z.B. durch $F : [0,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$\partial_r F(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial\varphi F(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\partial_r F \times \partial_\varphi F)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Also ist mit dieser Parametrisierung

$$\int_B \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^2 r\,\mathrm{d}r = 4\pi.$$

(c) Es ist $\partial K = B \cup D$. Daher gilt nach dem Satz von Gauß:

$$\int_D \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_D \langle f, \pm\nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \pm\left(\int_K \underbrace{\operatorname{div} f(x,y,z)}_{=0} \,\mathrm{d}(x,y,z) - \underbrace{\int_B \langle f, \nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma}_{=4\pi}\right) = \mp 4\pi.$$

Alternativ:

Da $\operatorname{div} f = 0$, existiert ein Vektorpotential $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}\Phi = f$. Da $\partial D = \partial B$, gilt mit dem Satz von Stokes:

$$\int_D \langle \underbrace{f}_{=\operatorname{rot}\Phi}, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial D} \langle \Phi, \mathrm{d}x\rangle = \oint_{\partial B} \langle \Phi, \mathrm{d}x\rangle = \int_B \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \pm 4\pi.$$

Alternativ:

Wir parametrisieren D z.B. durch $F : [0,2\pi] \times [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ 2\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ 2\sin(\psi) \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$\partial_\varphi F(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ 2\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_\psi F(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} -2\cos(\varphi)\sin(\psi) \\ -2\sin(\varphi)\sin(\psi) \\ 2\cos(\psi) \end{pmatrix}$$

und somit

$$(\partial_\varphi F \times \partial_\psi F)(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} 4\cos(\varphi)\cos^2(\psi) \\ 4\sin(\varphi)\cos^2(\psi) \\ 4\sin(\psi)\cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

Damit ist nach der Definition des Oberflächenintegrals zweiter Art

$$\begin{aligned} \iint_D \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} f(F(\varphi,\psi))\cdot(\partial_\varphi F \times \partial_\psi F)(\varphi,\psi)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 4\sin(\psi)\cos(\psi)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 4\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2(\psi)\right]_0^{\pi/2} = 4\pi. \end{aligned}$$

(d) Es ist

$$\operatorname{rot} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y \cos(z) - \partial_z(x+y^9) \\ \partial_z e^x - \partial_x \cos(z) \\ \partial_x(x+y^9) - \partial_y e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da C die Randkurve von B ist, gilt mit dem Satz von Stokes

$$\oint_C \langle g, \mathrm{d}x\rangle = \int_B \langle \underbrace{\operatorname{rot} g}_{=f}, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \pm 4\pi.$$

Alternativ:

Das Wegintegral kann auch direkt berechnet werden, indem wir C parametrisieren durch $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir

$$
\begin{aligned}
\oint_C \langle g, \mathrm{d}x \rangle &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{2\cos(\varphi)} \\ 2\cos(\varphi) + 2^9 \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi) \\ 2\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-2e^{2\cos(\varphi)} \sin(\varphi) + 4\cos^2(\varphi) + 2^{10} \sin^9(\varphi)\cos(\varphi) \right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \left[e^{2\cos(\varphi)} + 2(\varphi + \sin(\varphi)\cos(\varphi)) + \frac{2^{10}}{10} \sin^{10}(\varphi) \right]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die Berechnung des Integrals wird sogar noch einfacher, wenn man $[-\pi, \pi]$ als Definitionsbereich von γ wählt. Dann ist nämlich sofort zu sehen, dass die ungeraden Anteile des Integranden (alles außer $4\cos^2(\varphi)$) verschwinden.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Gegeben sei die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{für } x \in [0, \pi]\,, \\ 0, & \text{für } x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

b) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe punktweise?

c) Gegeben sei der Unterraum $S = \operatorname{span}\{\cos x, \cos 4x, \sin 3x\}$. Bestimmen Sie das Element von S, welches bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ den minimalen Abstand zu f besitzt. Dabei ist

$$\|u\|_2 := \left(\int_0^{2\pi} u(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

d) Sei $u(x,t)$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \partial_x^2 u$ mit 2π-periodischen Randbedingungen und Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

Lösung:

(a) f ist 2π-periodisch. Dann hat die zugehörige reelle Fourierreihe F_f die Form

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Es ist

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\,\mathrm{d}x = 4.$$

Die Fourierkoeffizienten a_k, b_k sind dann für $k \geqq 1$ gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi} = 0,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k}\right] = -\frac{4}{k\pi}[(-1)^k - 1].$$

Bemerkung: Man kann sich die explizite Berechnung der a_k sparen, wenn man berücksichtigt, dass $f-2$ eine ungerade Funktion ist, d.h. die Fourierreihe von $f-2$ ist eine reine Sinusreihe. Damit muss die Fourierreihe F_f von f von der Form

$$F_f(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

sein.

Alternativ:

Die komplexe Fourierreihe $\mathcal{F}_f$ ist von der Form

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikx}.$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$ berechnen sich für $|k| \geqq 1$ durch

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{-ik}e^{-ikx}\right]_0^{\pi} = \frac{2i}{k\pi}(e^{-ik\pi}-1) = \frac{2i}{k\pi}[(-1)^k - 1]$$

und für $k = 0$ durch

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 4\,\mathrm{d}x = 2.$$

(b) Die Fourierreihe konvergiert punktweise gegen die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2 & \text{, für } x \in \{0,\pi\}, \\ 4 & \text{, für } x \in (0,\pi), \\ 0 & \text{, für } x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

(c) Da die $\|\cdot\|_2$-Norm vom Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit

$$\langle u, v\rangle := \int_0^{2\pi} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

induziert wird, ist $g \in S$ mit dem kürzesten Abstand zu f gegeben durch die Orthogonalprojektion von f auf S. Da eine Orthonormalbasis von S gegeben ist durch

$$\{s_1, s_2, s_3\} := \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(4\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(3\cdot)\right\},$$

ist

$$\begin{aligned} g(x) &= \langle f, s_1\rangle s_1(x) + \langle f, s_2\rangle s_2(x) + \langle f, s_3\rangle s_3(x) \\ &= a_1\cos(x) + a_4\cos(4x) + b_3\sin(3x) \\ &= \frac{8}{3\pi}\sin(3x). \end{aligned}$$

(d) Wir machen den Ansatz $u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k(t)e^{ikx}$. Dann müssen die komplexen Fourierkoeffizienten von u der Differentialgleichung

$$\partial_t \hat{u}_k(t) = -k^2 \hat{u}_k(t)$$

genügen. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch $\hat{u}_k(t) = c_k e^{-k^2 t}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$.

Aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ erhalten wir $\hat{u}_k(0) = \hat{f}_k$, woraus sich für $t > 0$ die Lösungsdarstellung

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{-k^2 t} e^{ikx}$$

ergibt.

Um $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ zu berechnen, schreiben wir

$$u(x,t) = 2 + e^{-t} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \hat{f}_k e^{-(k^2-1)t} e^{ikx}. \tag{1}$$

Da

$$\left| \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \hat{f}_k e^{-(k^2-1)t} e^{ikx} \right| \leqq \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{f}_k| e^{-(k^2-1)t} \leqq \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{4}{k\pi} e^{-(k^2-1)t} \leqq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} e^{-(k^2-1)t}$$

und die letzte Reihe für $t > 0$ absolut konvergiert (z.B. leicht mit Hilfe des Wurzel- oder Quotientenkriteriums einzusehen), konvergiert der zweite Summand in (1) gleichmäßig gegen 0 für $t \to \infty$. D.h. $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

a) Betrachten Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = \sin x$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ und $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$ für die Lösung $t \mapsto x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 5$.

b) Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= \mu y + x - x^3.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Fixpunkte und untersuchen Sie deren Stabilität in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

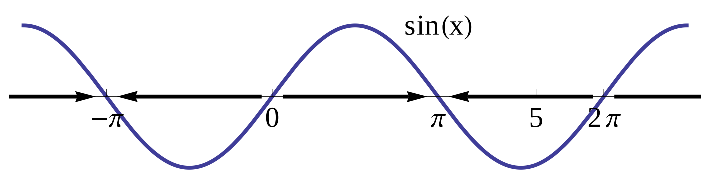
c) Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(x)$ der exakten Differentialgleichung

$$4xy - 4x^3 + 2(y + x^2)y' = 0$$

mit $y(0) = -3$.

Lösung:

(a) Die Differentialgleichung besitzt die Fixpunkte $k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da $(\sin(x))'|_{x=k\pi} = \cos(x)|_{x=k\pi} = (-1)^k$, sind die Fixpunkte $k\pi$ asymptotisch stabil für ungerades k und andernfalls instabil. Da $\pi < 5 < 2\pi$, gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = \pi$ und $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 2\pi$ wie auch leicht aus dem Phasenporträt zu erkennen ist:



Alternativ:

Die Differentialgleichung lässt sich auch explizit lösen mit Hilfe der Trennung der Veränderlichen.

Da sowohl $x \equiv \pi$ als auch $x \equiv 2\pi$ Lösungen der Differentialgleichung sind und $\pi < x(0) = 5 < 2\pi$, muss wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes gelten, dass $\pi < x(t) < 2\pi$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Da somit insbesondere $\sin(x(t)) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, erhalten wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Auflösen von

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = c + t.$$

Es ist

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\sin(x-\pi)}{1-\cos^2(x-\pi)}\,\mathrm{d}x.$$

Wir machen die Substitution $y = \cos(x-\pi)$ (dies garantiert, dass $x = \pi + \arccos(y) \in (\pi, 2\pi)$).

$$= \int \frac{1}{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right),$$

da $y \in (-1, 1)$. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x(t) = \pi + \arccos\left(\frac{Ke^{2t}-1}{Ke^{2t}+1}\right).$$

Unabhängig von $K \in \mathbb{R}$ gilt dann $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \pi + \arccos(\pm 1)$, also

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 2\pi \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} x(t) = \pi.$$

(b) Wir interpretieren das Differentialgleichungssystem als

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x,y).$$

Die Fixpunkte sind dann gegeben durch die Lösungen von $F(x,y) = (0,0)^\top$. Es ergibt sich unmittelbar aus der ersten Zeile, dass $y = 0$ sein muss, was dann insgesamt zu den Fixpunkten $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ führt. Die Stabilität der Fixpunkte bestimmen wir durch Berechnen von J_F.

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & \mu \end{pmatrix}, \quad J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, \quad J_F(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $J_F(0,0)$ sind dann $\lambda_{1/2} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4}+1}$. Da $\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+1} > \left|\frac{\mu}{2}\right|$, ist $\lambda_1 > 0$ unabhängig von $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D.h. der Fixpunkt $(0,0)$ ist stets instabil.

Die Eigenwerte von $J_F(\pm 1, 0)$ sind $\lambda_{3/4} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4}-2}$.

- Für $\mu > 0$ ist $\operatorname{Re}\lambda_3 > 0$, d.h. die beiden Fixpunkte sind in diesem Fall jeweils instabil.
- Ist $\mu \in (-2\sqrt{2}, 0)$, so ist $\operatorname{Re}\lambda_{3/4} = \frac{\mu}{2} < 0$, d.h. die beiden Fixpunkte sind dann jeweils asymptotisch stabil.
- Ist $\mu \leqq -2\sqrt{2}$, dann ist $\sqrt{\frac{\mu^2}{4}-2} < \left|\frac{\mu}{2}\right|$, somit also $\lambda_{3/4} < 0$. D.h. die beiden Fixpunkte sind in diesem Fall ebenfalls asymptotisch stabil.

Alternativ:

Für die Stabilitätseigenschaften der Fixpunkte sind nur die Vorzeichen der Realteile der Eigenwerte interessant. Für 2×2-Matrizen A gilt

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{spur} A = \lambda_1 + \lambda_2,$$

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A sind.

Die Eigenwerte von $J_F(0,0)$ sind reell, da die Matrix symmetrisch ist. Daher folgt aus $\det J_F(0,0) = -1 < 0$, dass die Eigenwerte von J_F unterschiedliche Vorzeichen haben müssen, weshalb es unabhängig von μ mindestens einen positiven Eigenwert gibt und $(0,0)$ somit instabil ist für alle $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$J_F(\pm 1, 0)$ ist nicht symmetrisch, daher gilt entweder $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oder $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

Falls beide Eigenwerte reell sind, folgt aus $\det J_F(\pm 1, 0) = 1 > 0$, so dass λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen besitzen. Wegen $\operatorname{spur} J_F(\pm 1, 0) = \mu$, gilt dann $\operatorname{sign}(\mu) = \operatorname{sign}(\lambda_1) = \operatorname{sign}(\lambda_2)$, so dass in diesem Fall Stabilität vorliegt, falls $\mu < 0$, und Instabilität, falls $\mu > 0$.

Sind beide Eigenwerte komplex konjugiert, so ist $\operatorname{spur} J_F(\pm 1, 0) = 2\operatorname{Re}\lambda_1 = 2\operatorname{Re}\lambda_2 = \mu$, so dass wiederum (In-)Stabilität vorliegt für $\mu < 0\,(> 0)$.

(c) Gesucht ist eine Funktion $H(x,y)$, welche entlang von Lösungen konstant ist, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x, y(x)) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_x H(x,y) + \partial_y H(x,y) y' = 0.$$

Damit erhalten wir aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_x H(x,y) &\stackrel{!}{=} 4xy - 4x^3 && \Rightarrow \quad H(x,y) = 2x^2 y - x^4 + c(y), \\ \partial_y H(x,y) = 2x^2 + c'(y) &\stackrel{!}{=} 2y + 2x^2 && \Rightarrow \quad \text{z.B.: } H(x,y) = y^2 + 2x^2 y - x^4. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösungen $y(x)$ durch Auflösen der impliziten Gleichung $H(x, y(x)) = c \in \mathbb{R}$, also

$$y(x) = -x^2 \pm \sqrt{c + 2x^4}.$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung $y(0) = -3$ haben wir dann $y(x) = -x^2 - \sqrt{9 + 2x^4}$.

Bemerkung: Es genügt nicht, die Lösung y in impliziter Form

$$y^2(x) + 2x^2 y(x) - x^4 = 9$$

anzugeben, da diese Gleichung zwei Lösungen zulässt, nämlich $y_{1/2}(x) = -x^2 \pm \sqrt{9 + 2x^4}$. Da allerdings $y_1(0) = 3$, kann dies keine Lösung des Anfangswertproblems sein.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie diejenige Möbiustransformation, welche -1 in i, $3i$ in 3 und 2 in $-2i$ abbildet.

b) Bestimmen Sie eine Funktion v zu $u = x^2 - y^2$, so dass $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex differenzierbar ist.

c) Gegeben sei die komplex differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \text{ welche auf } K_1 = \{z = e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

die Werte $f(e^{i\varphi}) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ annimmt. Bestimmen Sie $f(0)$ und allgemein $f^{(n)}(0)$ für $n \in \mathbb{N}$.

d) Bestimmen Sie

$$\oint_{\{|z|=8\}} \frac{1}{z^2 - 3z + 2}\,\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \oint_{\{|z|=4\}} \frac{1}{(z-2)^6}\,\mathrm{d}z.$$

Lösung:

(a) Auflösen der Gleichung (6-Punkte-Formel)

$$\frac{3(z-3i)}{(z+1)(2-3i)} = \frac{-3i(w-3)}{(w-i)(-2i-3)}$$

liefert $w = M(z) = -iz$. M ist damit die gesuchte Möbiustransformation.

(b) Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) = 2x &\overset{!}{=} \partial_y v(x,y) & &\Rightarrow \quad v(x,y) = 2xy + c(x), \\ -\partial_y u(x,y) = 2y &\overset{!}{=} \partial_x v(x,y) = 2y + c'(x) & &\Rightarrow \quad v(x,y) = 2xy + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Nach der Cauchyschen Integralformel ist für z im von K_1 umschlossenen Gebiet für $n \geqq 0$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Damit haben wir

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\overbrace{f(e^{i\varphi})}^{e^{i\varphi}}}{e^{i(n+1)\varphi}} i e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Damit ist $f'(0) = 1$ und

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi} \left[\frac{i}{n-1} e^{-i(n-1)t} \right]_0^{2\pi} = 0$$

für $n \neq 1$.

Alternativ:

Die identische Abbildung $\mathrm{id} : z \mapsto z$ erfüllt die an f gestellten Bedingungen. Da nach der Cauchyschen Integralformel die Werte von f für z im Innern des Einheitskreises bereits eindeutig durch die Werte von f auf K_1 festgelegt sind, muss $f \equiv \mathrm{id}$ sein. Daher ist $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \geqq 2$.

(d) i) Es ist $z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$. Die beiden Singularitäten $z_1 = 1$ und $z_2 = 2$ liegen beide innerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius 8. Nach dem Residuensatz ist damit

$$\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2-3z+2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}, 1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}, 2\right)\right).$$

Da bei z_1 und z_2 jeweils Pole 1. Ordnung vorliegen, können die Residuen beispielweise durch die folgenden Formeln berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}, 1\right) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -1,\\
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}, 2\right) &= \left.\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^2-3z+2)}\right|_{z=2} = \frac{1}{2\cdot 2-3} = 1.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2-3z+2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i(-1+1) = 0.$$

Alternativ:

Mit einer Partialbruchzerlegung ergibt sich

$$\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2-3z+2}\,\mathrm{d}z = \oint_{|z|=8} \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z - \oint_{|z|=8} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z \overset{CIF}{=} 2\pi i \cdot 1|_{z=2} - 2\pi i \cdot 1|_{z=1} = 0.$$

ii) Bei $z = 2$ liegt ein Pol 6. Ordnung vor. Außerdem liegt die Singularität im Innern des Kreises um den Ursprung mit Radius 4. Deshalb haben wir mit dem Residuensatz

$$\oint_{|z|=4} \frac{1}{(z-2)^6}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-2)^6}, 2\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{5!}\lim_{z\to 2}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}\left((z-2)^6\frac{1}{(z-2)^6}\right) = 0.$$

Alternativ:

Da $\dfrac{1}{(z-2)^6}$ bereits in Form einer Laurentreihe um den Entwicklungspunkt 2 gegeben ist, lässt sich sofort ablesen, dass das Residuum gleich 0 ist.

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

a) Entwickeln Sie $f(z) = \dfrac{1}{z^2}e^z + \dfrac{1}{z-2}$ unter Verwendung der Exponentialreihe in eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, welche im Punkt $z = 1$ konvergiert. Wie lautet das Residuum dieser Reihe?

b) Bestimmen Sie

$$\oint_{\{|z|=1\}} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \oint_{\{|z|=1\}} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z.$$

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2+2i$.

Lösung:

(a) f besitzt Singularitäten in 0 und 2. Das Ringgebiet um 0, in dem f analytisch ist und welches 1 enthält, ist dann $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 2\}$. Damit ist insbesondere $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, so dass wir den zweiten Summanden in folgender Weise als geometrische Reihe schreiben können:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{k-2} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}z^j = \sum_{n=-2}^{\infty}a_n z^n,$$

wobei

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{, für } n \in \{-2,-1\}, \\ \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{2^{n+1}} & \text{, für } n \geqq 0. \end{cases}$$

Aus obiger Darstellung gewinnen wir sofort $\mathrm{Res}(f, 0) = a_{-1} = 1$.

(b) Weiter erkennt man sofort, dass $\mathrm{Res}(z \mapsto f(z)/z, 0) = a_0 = 0$. Da der Einheitskreis nur die Singularität $z_0 = 0$ enthält, ergibt sich damit nach dem Residuensatz sofort:

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i, \qquad \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

(c) Der Konvergenzradius der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2+2i$ ist gegeben durch den Abstand von z_0 zur nächstliegenden Singularität von f. Da 2 näher an z_0 liegt als 0, ist der Konvergenzradius $R = |(2+2i) - 2| = 2$.