**Höhere Mathematik I/II Diplomvorprüfung 17. 3. 2003**

# 1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
**bau**, **immo**, **tpbau**, **umw**, **mach**, **tema**, **enan**, **famo**, **tpmach**

**Bitte unbedingt beachten:**

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Alle fünf Aufgaben** zählen.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene DIN A4–Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 – 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Bei den **Aufgaben 3 – 5** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 23. 04. 2003 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  VIEL ERFOLG!!

**Hinweise für Wiederholer:**

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 02. 05. 2003 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

**Aufgabe 1** (15 Punkte)**:** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y''' - 3y'' - 8y' - 4y = 0 \; . \tag{1}$$

**a)** Geben Sie die allgemeine reelle Lösung von (1) an.

Hinweis: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind ganzzahlig.

**b)** Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(4)} + 2y''' - 3y'' - 8y' - 4y = 2e^{-2x} \; . \tag{2}$$

**c)** Welche Lösung $y$ der Differentialgleichung (1) erfüllt $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} y \; dx = 1$ ?

---

**Aufgabe 2** (15 Punkte)**:** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

**a)** Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenräume von $A$.

Zur Kontrolle: 2 ist ein Eigenwert von $A$.

**b)** Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von $A$ besteht.

**c)** Wie lautet die Euklidische Normalform der Quadrik

$$Q_0 : x^{\mathrm{t}} A x = 0 \; ?$$

Geben Sie die zugehörige Transformation

$$x = T\hat{x}$$

an.

**d)** Für welche $c \in \mathbb{R}$ enthält die Quadrik

$$Q_c : x^{\mathrm{t}} A x + c = 0$$

eine Gerade ?

| **Name:** | | **Matrikel–Nr.:** | |
|---|---|---|---|

---

**Aufgabe 3** (9 Punkte)**:** Bestimmen Sie für jede der folgenden Potenzreihen ihren Konvergenzradius $r$, die Menge $A$ aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe absolut konvergiert, und die Menge $K$ aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+\sqrt{n}} x^n ,$ | $r =$ | $A =$ | $K =$ |
| $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n x^n ,$ | $r =$ | $A =$ | $K =$ |
| $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 4^n} x^n ,$ | $r =$ | $A =$ | $K =$ |

---

**Aufgabe 4** (11 Punkte)**:** Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

Tragen Sie in die Kästchen jeweils den richtigen Wert oder Ausdruck ein oder, wenn der Sachverhalt nicht zutrifft, ein Minuszeichen (–) . Als Majoranten bzw. Minoranten sind nur Funktionen der Gestalt $x^a, a \in \mathbb{R}$ erlaubt.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^2+2x}\,dx$$

| | |
|---|---|
| Der Integrand ist an 0 stetig ergänzbar durch | |
| Das Integral hat die divergente Minorante | |

---

$$\int_0^1 \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

| | |
|---|---|
| Der Integrand ist an 0 stetig ergänzbar durch | |
| Das Integral besitzt als konvergente Majorante | |
| Das Integral hat die divergente Minorante | |

---

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{(x+\ln x)^3}}\,dx$$

| | |
|---|---|
| Das Integral besitzt als konvergente Majorante | |
| Das Integral hat die divergente Minorante | |

---

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

| | |
|---|---|
| Eine Stammfunktion von $\frac{\ln x}{x^2}$ ist | |
| Das Integral besitzt den Wert | |
| Das Integral hat die divergente Minorante | |

**Aufgabe 5** (10 Punkte)**:** Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\sin(2x)+2}$.

**a)** Untersuchen Sie $f$ auf Periodizität.

$f$ ist

| | |
|---|---|
| nicht periodisch | ○ |
| periodisch | ○ |

mit der Periodenlänge $\boxed{\phantom{xx}}$

**b)** Berechnen Sie alle Nullstellen von $f$ im Intervall $[0, \pi)$.

$N_1$ $\boxed{\left( \quad \middle| \; 0 \right)}$ $N_2$ $\boxed{\left( \quad \middle| \; 0 \right)}$

**c)** Berechnen Sie die Ableitung von $f$. $f'(x) = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$

**d)** Berechnen Sie alle Extrempunkte von $f$ im Intervall $[0, \pi)$, und geben Sie an, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt.

$E_1$ $\boxed{\left( \quad \middle| \quad \right)}$ $E_1$ ist

| | |
|---|---|
| lokales Maximum | ○ |
| lokales Minimum | ○ |

$E_2$ $\boxed{\left( \quad \middle| \quad \right)}$ $E_2$ ist

| | |
|---|---|
| lokales Maximum | ○ |
| lokales Minimum | ○ |

**e)** Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F$ von $f$. $F(x) = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$

**f)** Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$$