Klausur zur Höheren Mathematik III

für die Fachrichtungen: el, tpel

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 5 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **8. April 2013** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **15. April 2013** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM III–Schneider (`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Schneider-WS1213/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Fläche, welche durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 2 - x^2$ eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie $\iint\limits_{\{x^2+y^2 \leqq 1\}} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}(x,y)$ durch Einführen von Polarkoordinaten.

c) Berechnen Sie $\iiint\limits_K xy \,\mathrm{d}(x,y,z)$ für $(x,y,z) \in K$ mit $K = [0,1] \times [0,3] \times [0,10]$.

d) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Platte $P = \{(x,y) \mid y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ bei konstanter Dichte ρ_0.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Gegeben seien das Vektorfeld $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Körper $K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \text{ und } z \geqq 0\}$.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$.

b) Bestimmen Sie den Durchfluss $\int\limits_B \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma$ durch den Boden

$$B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \text{ und } z = 0\}.$$

c) Bestimmen Sie den Durchfluss $\int\limits_D \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma$ durch den Deckel

$$D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ und } z \geqq 0\}.$$

d) Sei $g = \begin{pmatrix} e^x \\ x+y^9 \\ \cos z \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} g$ und das Wegintegral $\oint\limits_C \langle g, \mathrm{d}x\rangle$ zweiter Art, wobei $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ und } z = 0\}$.

Hinweis: Einige Aufgabenteile vereinfachen sich bei Verwendung von Integralsätzen erheblich.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Gegeben sei die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{für } x \in [0, \pi]\,, \\ 0, & \text{für } x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

b) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe punktweise?

c) Gegeben sei der Unterraum $S = \operatorname{span}\{\cos x, \cos 4x, \sin 3x\}$. Bestimmen Sie das Element von S, welches bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ den minimalen Abstand zu f besitzt. Dabei ist

$$\|u\|_2 := \left(\int_0^{2\pi} u(x)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

d) Sei $u(x,t)$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \partial_x^2 u$ mit 2π-periodischen Randbedingungen und Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

a) Betrachten Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = \sin x$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ und $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$ für die Lösung $t \mapsto x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 5$.

b) Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu y + x - x^3. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Fixpunkte und untersuchen Sie deren Stabilität in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(x)$ der exakten Differentialgleichung

$$4xy - 4x^3 + 2(y + x^2)y' = 0$$

mit $y(0) = -3$.