Teil I

Aufgabe I.1* **(12 Punkte)**

a) Welche der nachstehenden Folgen sind konvergent, welche divergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \frac{4n^3 - 3n}{2n^2 - 3n + 5}, \qquad b_n := \frac{3n^4 - 2n - 1}{(n^2-1)^2}, \qquad c_n := \frac{n}{\ln(2^n)}.$$

b) Bestimmen Sie die folgenden Funktionengrenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Lösung zu Aufgabe I.1

a) Die Folge a_n ist (bestimmt) divergent, denn der Zählergrad ist höher als der Nennergrad, d.h.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 3n}{2n^2 - 3n + 5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{4n - \frac{3}{n}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4n - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}}{2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} = \infty.
\end{aligned}$$

Die Folge b_n ist konvergent mit dem Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 2n - 1}{(n^2-1)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 2n - 1}{n^4 - 2n^2 + 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4} \frac{3 - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = 3.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Logarithmus-Regel $\log(a^b) = b\log(a)$ für $a, b > 0$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(2^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\log(2)} = \frac{1}{\log(2)}.$$

b) Mit der Regel von L'Hospital berechnen sich die ersten beiden Grenzwerte zu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1,$$

bzw.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

Der dritte Grenzwert ergibt sich zu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Aufgabe I.2* **(8 Punkte)**

a) Bestimmen Sie folgendes Integral mittels partieller Integration:

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Bestimmen Sie folgendes Integral mittels Substitution:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung zu Aufgabe I.2

a) Die Formel für die partielle Integration lautet

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir setzen $f(x) = x, g(x) = -\cos(x)$. Dann ist $f'(x) = 1$ und $g'(x) = \sin(x)$. In die Formel eingesetzt erhält man

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi (-\cos(x))\,\mathrm{d}x = [\sin(x) - x\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} = \pi.$$

b) Wir substituieren $u = 1 + x^2$. Dann ist $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Die neuen Integralgrenzen ergeben sich zu $u(0) = 1$ und $u(1) = 2$.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,[\ln(u)]_{u=1}^{u=2} = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Aufgabe I.3* **(10 Punkte)**

a) Geben Sie für die folgenden Reihen an, ob sie divergieren oder konvergieren und begründen Sie ihre Entscheidung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n!}.$$

b) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}.$$

Lösung zu Aufgabe I.3

a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \neq 0.$$

Also divergiert die Reihe (bestimmte Divergenz gegen $+\infty$).
Für die zweite Reihe gilt

$$\left|\frac{\sin(n)}{n!}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n!} \leq \frac{1}{n!}.$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium im Vergleich mit der konvergenten Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

b) Es ist

$$3^{-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

also liegt eine geometrische Reihe vor. Diese hat den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Die zweite Reihe ist gerade die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

ausgewertet an der Stelle $x = -2$. Der Grenzwert ergibt sich also zu e^{-2}.

Aufgabe I.4* **(6 Punkte)**

In ein Bankkonto mit einem Startguthaben von 0 € werden am Anfang jedes Jahres 2.500 € eingezahlt. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit 2% verzinst.

a) Wie hoch ist das Guthaben nach 20 Jahren?
b) Nach wie vielen Jahren übersteigt das Guthaben erstmals den Betrag von 40.000 €?

Lösung zu Aufgabe I.4 Bezeichnet R die jährliche Einzahlung bei einem Zinsfaktor von q, dann ergibt sich das Guthaben K_n nach n Jahren aus der Formel

$$K_n = q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot R.$$

a) Es ist $q = 1{,}02, R = 2500, n = 20$. Einsetzen liefert

$$K_{20} = 1{,}02 \cdot \frac{1 - 1{,}02^{20}}{1 - 1{,}02} \cdot 2500 \approx 61958{,}29.$$

b) Es ist folgende Ungleichung in n zu lösen

$$40000 < 1{,}02 \cdot \frac{1 - 1{,}02^n}{1 - 1{,}02} \cdot 2500.$$

Wir erhalten

$$1{,}02^n > 1 - \frac{40000(1 - 1,02)}{1{,}02 \cdot 2500}$$

bzw. nach Anwendung des Logarithmus auf beiden Seiten

$$n > \frac{\ln\left(1 - \frac{40000(1-1{,}02)}{1{,}02 \cdot 2500}\right)}{\ln(1{,}02)} \approx 13{,}78.$$

Das Guthaben übersteigt also erstmals nach 14 Jahren einen Wert von 40000 €.

Aufgabe I.5 **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$.

a) Bestimmen Sie die Intervalle in denen die Funktion monoton steigt.
b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima bzw. Minima von f.

Lösung zu Aufgabe I.5

a) Die Ableitung von f ist $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$. Sie hat Nullstellen in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$. Es ist

$$f'(x) \begin{cases} > 0, \text{ falls } x < 0; \\ < 0, \text{ falls } 0 < x < 1; \\ > 0, \text{ falls } x > 1. \end{cases}$$

Also ist f monoton steigend in den Intervallen $(-\infty, 0]$ und $[1, \infty)$.

b) Die zweite Ableitung berechnet sich zu $f''(x) = 12x - 6$. Es ist $f''(0) = -6$, also liegt in $x = 0$ ein lokales Maximum vor. Wegen $f''(1) = 6$ liegt in $x = 1$ ein lokales Minimum vor.

Aufgabe I.6 **(10 Punkte)**

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gaußalgorithmus.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ x - z &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 2. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe I.6

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.-I.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III.-2\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot II.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III.-5\cdot II.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.+III.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I.-III.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I.+2\cdot II.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems ist also $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

Teil II

Aufgabe II.1* **(6 Punkte)**
Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion $f(x) = e^x \sin(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung zu Aufgabe II.1 Das Taylorpolynom $p(x)$ hat die Gestalt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Die gesuchten Ableitungen f, f', f'' berechnen sich zu

$$\begin{array}{lll} f(x) = e^x \sin(x) & \to & f(0) = 0 \\ f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)) & \to & f'(0) = 1 \\ f''(x) = 2e^x \cos(x) & \to & f''(0) = 2. \end{array}$$

Wir erhalten also

$$p(x) = x + x^2.$$

Aufgabe II.2* **(10 Punkte)**
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy^2$. Ist $(0, 0)$ ein lokaler Extremwert von f? Wenn ja, von welcher Art ist die Extremstelle?

Lösung zu Aufgabe II.2 Der Gradient von f berechnet sich zu

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ 4y + 2xy \end{pmatrix}.$$

Es ist $\nabla_f(0, 0) = (0, 0)^t$. Die Hessematrix von f hat die Gestalt

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 4 + 2x \end{pmatrix}$$

und es ist damit

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist positiv definit mit den Hauptminoren 2 und 8. Also liegt in $(0, 0)$ ein Minimum der Funktion f vor.

Aufgabe II.3* **(10 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + 4x - 3$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle besitzt. Konvergiert das Newton-Verfahren, wenn man als Startwert $x_0 = 1$ wählt?
b) Berechnen Sie die ersten zwei Iterierten x_1 und x_2 des Newton-Verfahrens zum Startwert $x_0 = 1$.

Lösung zu Aufgabe II.3

a) Wegen $f(0) = -3 < 0$ und $f(1) = 2 > 0$ besitzt f im Intervall $[0, 1]$ (mindestens) eine Nullstelle. Die Ableitungen von f sind

$$f'(x) = 2x + 4, \qquad f''(x) = 2.$$

Im Intervall $[0, 1]$ ist $f'(x) > 0$ und es ist stets $f'(x) > 0$. Daher konvergiert das Newton-Verfahren zum Startwert $x_0 = 1$.

b) Die Newton-Vorschrift lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Damit ergibt sich

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{31}{48}.$$

Aufgabe II.4* **(10 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Determinante von A.
b) Entscheiden Sie, ob A positiv oder negativ definit ist.

Lösung zu Aufgabe II.4

a) Die Determinante berechnet sich mit der Jägerzaunregel zu

$$\det(A) = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 0 + 0 - 0 - (-1) \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot (-2) \cdot (-2) = 7.$$

Alternativ mit dem Gaußalgorithmus

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I.+II.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.+2\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)]{I.\leftrightarrow II.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III.+5\cdot II.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ergibt sich als Produkt der Diagonalelemente multipliziert mit -1 für jede Zeilenvertauschung. In diesem Fall also $\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot (-1) = 7$.

b) Die Hauptminoren von A berechnen sich zu

$$\det(3) = 3, \qquad \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 9 - 4 = 5, \qquad \det(A) = 7.$$

Da alle Hauptminoren positiv sind ist die Matrix positiv definit.

Aufgabe II.5 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Flachstellen der Funktion $f(x, y) = x^3 - y^2 - 2x$ unter der Nebenbedingung $y = x - 1$.

Lösung zu Aufgabe II.5 Wir setzen $g(x, y) := y - x + 1$. Die Gradienten ∇_f, ∇_g von f und g berechnen sich zu

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2 \\ -2y \end{pmatrix}, \qquad \nabla_g(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu lösen ist das Gleichungssystem $\nabla_f(x, y) = \lambda \nabla_g(x, y), g(x, y) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2 &= -\lambda \\ -2y &= \lambda \\ y &= x - 1. \end{aligned}$$

Setzt man y aus der dritten Gleichung in die zweite Gleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2 &= -\lambda \\ -2x + 2 &= \lambda. \end{aligned}$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit -1 und Gleichsetzen mit der ersten Zeile liefert

$$3x^2 - 2 = 2x - 2,$$

bzw. $3x^2 - 2x = 0$. Diese Gleichung wird genau von $x = 0$ und $x = \frac{2}{3}$ gelöst. Einsetzen dieser Werte in etwa $y = x - 1$ liefert die beiden Flachstellen

$$(0, -1), \qquad \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Aufgabe II.6 **(10 Punkte)**

a) Finden Sie eine nicht konstante Funktion $y = f(x)$, welche die Differentialgleichung $y' = y^2 e^{-x}$ löst.
b) Finden Sie eine nicht konstante Funktion $y = f(x)$, welche die Differentialgleichung $y' = y \sin(x)$ löst.

Lösung zu Aufgabe II.6

a) Separation der Variablen liefert
$$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
Wir integrieren auf beiden Seiten
$$\int_a^y \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_b^x e^{-u}\mathrm{d}u,$$
bzw.
$$-\frac{1}{y} = -e^{-x} + K,$$
mit der von a, b abhängigen Integrationskonstanten K. Umstellen liefert die Lösungen
$$f(x) = y = \frac{1}{e^{-x} - K}.$$
Eine spezielle Lösung ergibt sich bei der Wahl $K = 0$ zu $f(x) = e^x$.

b) Separation der Variablen liefert
$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$
Wir integrieren auf beiden Seiten
$$\int_a^y \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_b^x \sin(u)\mathrm{d}u,$$
bzw.
$$\ln(y) = -\cos(x) + K,$$
mit der von a, b abhängigen Integrationskonstanten K. Umstellen liefert die Lösungen
$$f(x) = y = e^{-\cos(x)+K}.$$
Eine spezielle Lösung ergibt sich bei der Wahl $K = 0$ zu $f(x) = e^{-\cos(x)}$.