Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ernen, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf, geod und so weiter ;)

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
Die Fläche T im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben als

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 - |z|\}.$$

Bestimmen Sie für das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (xz, yz, \frac{1}{3}z^3)$ den Ausfluss $A(f,T)$.

Lösungsvorschlag: Nach dem Satz von Gauss gilt: $A(f,T) = \int\int\int_{\overline{V}} \mathrm{div} f \; dx\, dy\, dz$, wobei $\overline{V}$ das Innere von T bezeichnet. Es ist

$$\mathrm{div} f(x,y,z) = 2z + z^2.$$

Benutze Zylinderkoordinaten: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ mit $0 \leq r \leq \sqrt{1-|z|}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ und $|z| \leq 1$.
Die Funktionaldeterminante für die Koordinatentransformation ist r.
Also ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A(f,T) &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-|z|}} r \cdot \mathrm{div} f \; dr\, dz\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-|z|}} r(2z+z^2) \; dr\, dz\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} [\frac{1}{2} r^2 (2z+z^2)]_0^{\sqrt{1-|z|}} \; dz\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} (1-|z|)(\frac{1}{2}z^2 + z) \; dz\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{0} (1+z)(\frac{1}{2}z^2+z)\; dz + \int_0^1 (1-z)(\frac{1}{2}z^2+z)\; dz \right) d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \left([\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{8}z^4]_{-1}^{0} + [\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4]_0^1 \right) d\theta = \\
&= 2\pi(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Alternativ: Ohne den Satz von Gauss lässt sich der Ausfluss direkt berechnen als

$$A(f,T) = \int\int_T f \cdot n \, dO.$$

Dazu parametrisiert man T wieder durch Zylinderkoordinaten:

$$\Phi : [-1,1] \times [0,2\pi) \to T, \quad (z,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-|z|}\cos\theta \\ \sqrt{1-|z|}\sin\theta \\ z \end{pmatrix}.$$

Normalenvektoren erhält man durch das Kreuzprodukt der Ableitungen: für $z > 0$ ist

$$\Phi_z \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{1-z}}\cos\theta \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-z}}\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z}\sin\theta \\ \sqrt{1-z}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z}\cos\theta \\ -\sqrt{1-z}\sin\theta \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und für $z < 0$ analog

$$\Phi_z \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{1+z}}\cos\theta \\ \frac{1}{2\sqrt{1+z}}\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{1+z}\sin\theta \\ \sqrt{1+z}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+z}\cos\theta \\ -\sqrt{1+z}\sin\theta \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmt man diese Vektoren an ausgewählten Punkten, zum Beispiel an $(\frac{1}{2},0)$ und $(-\frac{1}{2},0)$, so sieht man, dass äusseren Normalenvektoren in beiden Fällen durch $-\Phi_z \times \Phi_\theta$ gegeben sind (der äussere Einheitsnormalenvektor n wäre dann $(-\Phi_z \times \Phi_\theta) \cdot |\Phi_z \times \Phi_\theta|^{-1}$, die Bestimmung von n ist aber für die Berechnung des Integrals nicht nötig). Damit berechnet man nun

$$A(f,T) = \int\int_T f \cdot n \, dO = \int\int_T f(\Phi(z,\theta)) \cdot n|\Phi_z(z,\theta) \times \Phi_\theta(z,\theta)| \, dz \, d\theta =$$

$$= \int\int_T f(\Phi(z,\theta)) \cdot (-\Phi_z \times \Phi_\theta) \, dz \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^0 \begin{pmatrix} z\sqrt{1+z}\cos\theta \\ z\sqrt{1+z}\sin\theta \\ \frac{1}{3}z^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1+z}\cos\theta \\ \sqrt{1+z}\sin\theta \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} dz + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \begin{pmatrix} z\sqrt{1-z}\cos\theta \\ z\sqrt{1-z}\sin\theta \\ \frac{1}{3}z^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1-z}\cos\theta \\ \sqrt{1-z}\sin\theta \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} dz \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^0 z(1+z) - \frac{1}{6}z^3 \, dz + \int_0^1 z(1-z) - \frac{1}{6}z^3 \, dz \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{24}z^4]_{-1}^0 + [\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{24}z^4]_0^1 \; d\theta =$$

$$= 2\pi(\frac{1}{24} + \frac{1}{24}) = \frac{\pi}{6}.$$

Aufgabe 2: *(12 Punkte)*
Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = Ay(x) + h(x)$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; h(x) := \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{-2x} \\ -4\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} .$$

Lösungsvorschlag: Zuerst bestimmen wir die Lösungen des homogenen Anteils $y'(x) = Ay(x)$. Wir lösen dazu zunächst ein Anfangswertproblem $y'(x) = Ay(x)$ mit $y(0) = v$. Wir wählen hier

$$v := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

betonen aber, dass man auch einen anderen Vektor wählen kann und analog vorgehen kann (solange dessen Bild unter A linear unahängig zu diesem Vektor ist – ansonsten, also bei einem Eigenvektor, muss das Verfahren wiederholt werden). Es ist

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daher sicherlich $Av \notin \langle v \rangle$. Für

$$A^2 v = A(Av) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gilt jedoch $A^2 v = 4Av - 4v$, wie man mit dem Gauß-Algorithmus sieht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Es gilt also $p(A)v = 0$ mit $p(X) := X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.
Ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $p(D) = 0$, d.h. $y'' - 4y'' + 4y = 0$, ist

$$\mathrm{e}^{2x}, \quad x\mathrm{e}^{2x} .$$

Die Wronski-Matrix dieses Fundamentalsystems ist

$$M(x) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} \\ 2\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$(M(0)^{-1})^{\mathrm{T}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir bekommen nun ein Element eines Fundamentalsystems von $y'(x) = Ay(x)$ durch

$$g_1(x) := (v \mid Av)\,(M(0)^{-1})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} \\ x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} \\ x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x} \\ x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} .$$

Eine dazu linear unabhängige Lösung ist

$$g_2(x) := Ag_1(x) = g_1'(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - 2xe^{2x} \\ e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung zu $y'(x) = Ay(x)$ ist also $\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Nun bestimmen wir eine spezielle Lösung von $y'(x) = Ay(x) + h(x)$ mittels Varitation der Konstanten. Die Wronski-Matrix des Fundamentalsystems (g_1, g_2) von $y'(x) = Ay(x)$ ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - xe^{2x} & e^{2x} - 2xe^{2x} \\ xe^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse von $M(x)$ ist laut Vorlesung

$$M(x)^{-1} = M(0)^{-1} M(-x) M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2x} + 2xe^{-2x} & 2xe^{-2x} - e^{-2x} \\ -xe^{-2x} & -xe^{-2x} + e^{-2x} \end{pmatrix} .$$

Wir müssen nun Funktionen $c_1(x), c_2(x)$ finden für die gilt

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} h(x) = \begin{pmatrix} 8e^{-4x} \\ -4e^{-4x} \end{pmatrix} .$$

Wir integrieren dazu die rechte Seite einfach komponentenweise under erhalten:

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-4x} \\ e^{-4x} \end{pmatrix} .$$

Eine spezielle Lösung zu $y'(x) = Ay(x) + h(x)$ ist nun

$$g_p(x) := M(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$\alpha g_1(x) + \beta g_2(x) + g_p(x)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 8 + 4\cos(2x).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) ***Lösung der homogenen Gleichung***
Zuerst muss die Lösung f_h der homogenen Gleichung berechnet werden. Dazu bestimmt man das charakteristische Polynom aus der Gleichung $y'' + 4y = 0$:

$$p(X) = X^2 + 4 = (X + 2i)(X - 2i).$$

Dieses hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ und daher lautet die homogene Lösung:

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) ***Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite***
Hier nutzt man das Superpositionsprinzip aus, d. h. man sucht Lösungen f_{p_1} von $y''_{p_1} + 4y_{p_1} = 8$ und f_{p_2} von $y''_{p_2} + 4y_{p_2} = 4\cos(2x)$ und bekommt damit die partikuläre Lösung $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

(1): ***Störfunktion*** h_1
Für die Störfunktion $h_1(x) = 8$ erhält man den Ansatz

$$f_{p_1}(x) = ae^{0x},$$

da keine Resonanz vorliegt. Zweimaliges Differenzieren und Einsetzen liefert

$$0 + 4a \overset{!}{=} 8.$$

Somit lautet das Ergebnis nach Koeffizientenvergleich $f_{p_1}(x) = 2$.

(2): ***Störfunktion*** h_2 ***komplex***
Anstatt $h_2(x)$ betrachtet man zunächst die komplexe Störfunktion

$$\tilde{h}_2(x) = 4e^{2ix}.$$

Es liegt Resonanz vor mit $\lambda_1 = 2i$ und Vielfachheit $m = 1$, daher lautet der Ansatz

$$\tilde{f}_{p_2}(x) = axe^{2ix}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt mit dem Operatorenkalkül

$$\begin{aligned}
(D + 2i)(D - 2i)(axe^{2ix}) &\overset{!}{=} 4e^{2ix} \\
e^{2ix}(D + 4i)D(ax) &\overset{!}{=} 4e^{2ix} \\
(D + 4i)(a) &\overset{!}{=} 4 \\
4ia &\overset{!}{=} 4
\end{aligned}$$

und somit $a = -i$. Die partikuläre Lösung $\tilde{f}_{p_2}$ lautet also

$$\tilde{f}_{p_2}(x) = -ixe^{2ix} = x\sin(2x) - ix\cos(2x).$$

Da die eigentliche Störfunktion der Realteil der komplexen Störfunktion ist $h_2(x) = \Re(\tilde{h}_2(x))$ folgt damit auch für die gesuchte Partikulärlösung

$$f_{p_2}(x) = \Re(\tilde{f}_{p_2}(x)) = x\sin(2x).$$

(3): ***Störfunktion h_2 reell***
Man kann das Rechnen mit den komplexen Störfunktionen auch vermeiden, indem man direkt den folgenden reellen Ansatz macht

$$f_{p_2}(x) = ax\sin(2x) + bx\cos(2x).$$

Zweimaliges Ableiten dieser Ansatzfunktion liefert dann

$$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) =& (2ax+b)\cos(2x) + (a-2bx)\sin(2x), \\ f''_{p_2}(x) =& (4a-4bx)\cos(2x) - (4b+4ax)\sin(2x). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man durch einen Koeffizientenvergleich somit ein Gleichungssystem für die Unbekannten a und b

$$4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) \stackrel{!}{=} 4\cos(2x).$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $a = 1, b = 0$ und damit hat die partikuläre Lösung zu $h_2(x)$ wie vorher die Form

$$f_{p_2}(x) = x\sin(2x).$$

Die komplette Partikulärlösung erhält man durch Addition der Einzellösungen

$$f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = 2 + x\sin(2x).$$

(c) ***Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten***
Alternativ kann man die partikuläre Lösung auch durch Variation der Konstanten bestimmen. Dazu muss man die Wronskimatrix $M(x)$ für $f_1(x)$, $f_2(x)$ aufstellen und ihre Inverse $M^{-1}(x)$ berechnen

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}, \quad M^{-1}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos(2x) & -\sin(2x) \\ 2\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}.$$

Damit kann man ein Gleichungssystem für die Ableitungen der noch zu bestimmenden Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ aufstellen

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos(2x) & -\sin(2x) \\ 2\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4\,[2+\cos(2x)] \end{pmatrix}$$

und erhält nach Ausführen der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sin(2x) - 2\sin(2x)\cos(2x) \\ 4\cos(2x) + 2\cos^2(2x) \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass

$$-4\int \sin(2x)dx = 2\cos(2x) \quad \text{und} \quad 4\int \cos(2x)dx = 2\sin(2x).$$

Zur Bestimmung der restlichen Stammfunktionen kann man z.B. die Substitution $z = \sin(2x) \rightsquigarrow dz = 2\cos(2x)dx$ oder $z = \cos(2x) \rightsquigarrow dz = -2\sin(2x)dx$ nutzen

$$-\int 2\sin(2x)\cos(2x)dx = -\int zdz = -\frac{\sin^2(2x)}{2} \text{ bzw. } -\int zdz = \frac{\cos^2(2x)}{2}$$

bzw. partiell integrieren

$$\begin{aligned} \int \cos^2(2x)dx = \int \cos(2x)\cos(2x)dx &= \frac{\sin(2x)}{2}\cos(2x) + \int \sin^2(2x)dx \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) + \int (1-\cos^2(2x))dx \\ &= \frac{1}{4}\sin(2x)\cos(2x) + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Damit lauten die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ letztendlich

$$\begin{aligned} c_1(x) &= 2\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin^2(2x) \text{ bzw. } c_1(x) = 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos^2(2x), \\ c_2(x) &= 2\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\sin(2x) + x, \end{aligned}$$

und man bekommt die partikuläre Lösung durch Einsetzen dieser Funktionen

$$\begin{aligned} f_p(x) &= c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) \\ &= 2\cos^2(2x) - \frac{1}{2}\sin^2(2x)\cos(2x) + 2\sin^2(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\sin^2(2x) + x\sin(2x) \\ &= 2 + x\sin(2x) \quad \text{bzw.} \\ f_p(x) &= \frac{1}{2}\cos(2x) + 2 + x\sin(2x). \end{aligned}$$

Zusammenfassend lautet die allgemeine Lösung als Linearkombination des homogenen und partikulären Anteils somit

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = 2 + c_1\cos(2x) + (c_2 + x)\sin(2x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*
Die 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad x \in [-1,1), \quad f(x+2) = f(x) \quad \text{mit}$$

$$f_1(x) := \sin(7\pi x) \quad \text{und} \quad f_2(x) := \begin{cases} 3x, & x \in [-1,0) \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}.$$

(a) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.

(b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Zum Entwickeln der reellen Fourierreihe von f bietet es sich an die Fourierreihen von f_1 und f_2 zunächst separat zu bestimmen und danach zu kombinieren.

(1) Mit den bekannten Orthogonalitätsrelationen für f_1 sieht man sofort, dass

$$a_{1,k} = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0, \qquad b_{1,k} = (\mathbb{1}_{\{7\}}(k) =) \begin{cases} 1, k = 7 \\ 0, k \neq 7 \end{cases}, k \in \mathbb{N}_0.$$

(2) Der erste Koeffizient $a_{2,0}$ für f_2 folgt durch einfache Integration sofort:

$$a_{2,0} = 3\int_{-1}^{0} x dx + \int_{0}^{1} 0 dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\frac{3}{2}.$$

Zum Bestimmen der allgemeinen Koeffizienten ist es hilfreich zuerst die allgemeinen Stammfunktionen durch partielle Integration auszurechnen

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int x\cos(k\pi x)dx = \frac{x}{k\pi}\sin(k\pi x) + \frac{1}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x), \\ F_2(x) &= \int x\sin(k\pi x)dx = -\frac{x}{k\pi}\cos(k\pi x) + \frac{1}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten erhält man dann durch Einsetzen in diese Stammfunktionen

$$\begin{aligned} a_{2,k} &= 3\int_{-1}^{0} x\cos(k\pi x)dx + \int_{0}^{1} 0\cos(k\pi x)dx = 3F_1(0) - 3F_1(-1) \\ &= \frac{3}{k^2\pi^2} - \frac{3}{k^2\pi^2}\cos(-k\pi) = \frac{3}{k^2\pi^2}\left(1 - (-1)^k\right), \\ b_{2,k} &= 3\int_{-1}^{0} x\sin(k\pi x)dx + \int_{0}^{1} 0\sin(k\pi x)dx = 3F_2(0) - 3F_2(-1) \\ &= -\frac{3}{k\pi}\cos(-k\pi) = -\frac{3(-1)^k}{k\pi}. \end{aligned}$$

(3) Alternativ führt auch die Rechung im Komplexen für f_2 mit $T = 2$ und $\omega = \pi$ zum Ziel. Durch partielles Integrieren bekommt man

$$F_3(x) = \int xe^{-ik\pi x}dx = \left(\frac{ix}{k\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right)e^{-ik\pi x}$$

und somit die Koeffizienten $c_{2,k}$ analog zu den Rechnungen im Reellen als

$$\begin{aligned} c_{2,k} =& \frac{3}{2}\int_{-1}^{0} xe^{-ik\pi x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 0e^{-ik\pi x}dx = \frac{3}{2}F_3(0) - \frac{3}{2}F_3(-1) \\ =& \frac{3}{2}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{-i}{k\pi} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right)(-1)^k \\ =& \frac{3}{2}\frac{1}{k^2\pi^2}(1-(-1)^k) + i\frac{3}{2}\frac{(-1)^k}{k\pi}. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $c_{2,-k} = \bar{c}_{2,k}$ gilt und bekommt somit wie vorher

$$a_{2,k} = 2\Re(c_{2,k}) = \frac{3}{k^2\pi^2}(1-(-1)^k) \text{ und } b_{2,k} = -2\Im(c_{2,k}) = -\frac{3(-1)^k}{k\pi}.$$

(4) Fasst man nun alle vorher berechneten Koeffizienten zusammen und nutzt aus, dass die Koeffizienten mit geraden Indizes in der Cosinusreihe von f_2 verschwinden, so lautet die Fourierreihe von f

$$\begin{aligned} f(x) \sim& -\frac{3}{4} + \frac{3}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^k)}{k^2}\cos(k\pi x) \\ &- \frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(k\pi x) + \sin(7\pi x) \\ =& -\frac{3}{4} + \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)\pi x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathbb{1}_{\{7\}}(k) - \frac{3(-1)^k}{k\pi}\right)\sin(k\pi x). \end{aligned}$$

(b) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $(2k-1,2k) \cup (2k,2k+1)$ ($k \in \mathbb{Z}$) mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(2k-1,2k+1)$ ($k \in \mathbb{Z}$), konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$. In den Punkten $\{2k+1 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 3, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \nearrow 2k+1} f(x) + \lim_{x \searrow 2k+1} f(x)\right) = \frac{1}{2}(0-3) = -\frac{3}{2}.$$