Teil I

Aufgabe I.1* (8 Punkte)

a) Welche der nachstehenden Folgen sind konvergent, welche divergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \frac{2n+1}{(n+1)(n-1)}, \qquad b_n := \frac{n(n^2+1)}{(n-1)^2}, \qquad c_n := \frac{\ln(3^{-n})}{n}.$$

b) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} \text{ für ein } a \in \mathbb{R}.$$

Lösung zu Aufgabe I.1

a)
- Die Folge a_n ist eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

- Die Folge b_n ist (bestimmt) divergent, denn der Zählergrad ist höher als der Nennergrad, d.h.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1)}{(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{n^2-2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \infty.\end{aligned}$$

- Mit Hilfe der Logarithmus-Regel $\log(a^b) = b\log(a)$ für $a, b > 0$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{1\to\infty} \frac{\ln(3^{-n})}{n} = \lim_{1\to\infty} \frac{-n\ln(3)}{n} = -\ln(3).$$

Die Folge ist also konstant gleich $-\ln(3)$ und damit konvergent gegen $-\ln(3)$.

b)
- Mit der Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

- Mit der dritten binomischen Formel erhält man:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ: Auch die Regel von L'Hôpital führt zum Ziel.

- Mit der dritten binomischen Formel erhält man:
$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}x+a=2a$$
Alternativ: Auch hier lässt sich die Regel von L'Hôpital anwenden.

Aufgabe I.2* **(8 Punkte)**

a) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals mittels partieller Integration:
$$\int_0^\pi x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$
b) Bestimmen Sie Sie den Wert des folgenden Integrals:
$$\int_{-1}^0 (x+1)^{2013}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung zu Aufgabe I.2

a) Die Formel für die partielle Integration lautet
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=[f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
Wir setzen $f(x)=x^2, g(x)=\sin(x)$. Dann ist $f'(x)=2x$ und $g'(x)=\cos(x)$. In die Formel eingesetzt, erhält man
$$\int_0^\pi x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x=\left[x^2\sin(x)\right]_{x=0}^{x=\pi}-\int_0^\pi 2x\sin(x)\,\mathrm{d}x=$$
Nun kann man ein weiteres Mal partiell integrieren:
$$=\left[x^2\sin(x)\right]_{x=0}^{x=\pi}+[2x\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi}-\int_0^\pi 2\cos(x)\,\mathrm{d}x=$$
$$=\left[x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\sin(x)\right]_{x=0}^{x=\pi}=-2\pi.$$
b) Wir substituieren $u=x+1$. Dann ist $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. Die neuen Integralgrenzen ergeben sich zu 0 und 1.
$$\int_{-1}^0 (x+1)^{2013}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 u^{2013}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{1}{2014}u^{2014}\right]_{u=0}^{u=1}=\frac{1}{2014}.$$

Aufgabe I.3* **(8 Punkte)**

a) Geben Sie für die folgenden Reihen an, ob sie divergieren oder konvergieren und begründen Sie ihre Entscheidung:
$$\sum_{n=1}^\infty n^3,\qquad \sum_{n=0}^\infty \pi^{-n}.$$

b) Bestimmen Sie den Wert der folgenden konvergenten Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 7^{-n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Lösung zu Aufgabe I.3

a) Die erste Reihe divergiert, da die aufsummierte Folge keine Nullfolge ist. Die zweite Reihe konvergiert, da es sich um eine geometrische Reihe der Form $\sum q^n$ mit $|q| < 1$ handelt.

b) Bei der ersten handelt es sich um eine geometrische Reihe. Diese hat den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7}{6}.$$

Die zweite Reihe ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

ausgewertet an der Stelle $x = 1$, ihr Grenzwert ist also die Eulersche Zahl e.

Aufgabe I.4* **(8 Punkte)**

Auf ein Bankkonto mit einem anfänglichen Guthaben von 1000 € werden am Ende jedes Jahres 800 € eingezahlt. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit 1% verzinst.

a) Wie hoch ist das Guthaben nach 30 Jahren?

b) Nach wie vielen Jahren übersteigt das Guthaben erstmals den Betrag von 70.000 €?

Lösung zu Aufgabe I.4 Bezeichnet R die jährliche Einzahlung bei einem Zinsfaktor von q, dann ergibt sich das Guthaben K_n nach n Jahren aus der Formel für die Kapitalentwicklung bei nachschüssiger Zahlweise

$$K_n = q^n \cdot K_0 + \frac{1-q^n}{1-q} \cdot R,$$

wobei K_0 das Startkapital bezeichnet.

a) Es ist $q = 1{,}01, R = 800, n = 30$. Einsetzen liefert

$$K_{30} = 1{,}01^{30} \cdot 1000 + \frac{1-1{,}01^{30}}{1-1{,}01} \cdot 800 \approx 29175{,}76.$$

b) Es ist folgende Ungleichung in n zu lösen

$$70000 < 1{,}01^n \cdot 1000 + \frac{1-1{,}01^n}{1-1{,}01} \cdot 800.$$

Wir erhalten

$$1{,}01^n \cdot \left(1000 - \frac{1}{1-1{,}01} \cdot 800\right) > 70000 - \frac{1}{1-1{,}01} \cdot 800$$
$$\iff 1{,}01^n > \frac{150000}{81000}$$

bzw. nach Anwendung des Logarithmus (Taschenrechner) auf beiden Seiten

$$n > \frac{\ln(\frac{150}{81})}{\ln(1{,}01)} \approx 61{,}9.$$

Das Guthaben übersteigt also erstmals nach 62 Jahren einen Wert von 70.000 €.

Aufgabe I.5 **(8 Punkte)**

Sei die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ gegeben. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Lösung zu Aufgabe I.5 Das Taylorpolynom $p(x)$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k.$$

Die Ableitungen $f^{(k)}(1)$ berechnen sich zu

$$\begin{array}{rcl@{\quad}c@{\quad}rcr}
f^{(0)}(x) & = & \sqrt{x} & \Rightarrow & f^{(0)}(1) & = & 1 \\
f^{(1)}(x) & = & \frac{1}{2}x^{-1/2} & \Rightarrow & f^{(1)}(1) & = & \frac{1}{2} \\
f^{(2)}(x) & = & -\frac{1}{4}x^{-3/2} & \Rightarrow & f^{(2)}(1) & = & -\frac{1}{4}
\end{array}$$

Wir erhalten also

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

als Taylorpolynom vom Grad 2 für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe I.6 **(8 Punkte)**

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gaußalgorithmus.

$$\begin{aligned}
x - 2y + z &= 1 \\
x - z &= 2 \\
2x + y - 2z &= 3.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe I.6

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II.-I.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III.-2\cdot I.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot II.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III.-5\cdot II.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{II.+III.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{I.-III.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{I.+2\cdot II.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems ist also $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2})$.

Teil II

Aufgabe II.1* **(8 Punkte)**

Gegeben sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante von A.
b) Beweisen Sie, dass A positiv definit ist.

Lösung zu Aufgabe II.1

a) Die Determinante berechnet sich (z.B. mit der Jägerzaunregel) zu

$$4 \cdot 4 \cdot 4 + 0 + 0 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 0 = 64 - 16 - 4 = 44.$$

b) Es genügt, festzustellen, dass neben der Determinanten auch die beiden anderen Hauptminoren der Matrix positiv sind. In der Tat gilt $4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12 > 0$ und $4 > 0$.

Aufgabe II.2* **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 2x^2 + x^2y + y^2$ auf dem $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix am Punkt $(0, 0)$. Ist $(0, 0)$ ein lokaler Extremwert von f? Falls ja, handelt es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum?

Lösung zu Aufgabe II.2 Der Gradient von f berechnet sich zu

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2xy \\ x^2 + 2y \end{pmatrix}.$$

Es ist $\nabla_f(0, 0) = (0, 0)^t$. Die Hessematrix von f hat die Gestalt

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

und es ist damit

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist positiv definit mit den Hauptminoren 4 und 8. Also liegt in $(0, 0)$ ein lokales Minimum der Funktion f vor.

Aufgabe II.3* **(8 Punkte)**

Sei die Funktion $f(x,y,z) = x^2y^3z$ für positive reelle Zahlen x, y, z definiert. Finden Sie alle Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $x + y + z = 12$.

Lösung zu Aufgabe II.3 Sei $g(x,y,z) := x + y + z - 12$. Wir berechnen die Gradienten von f und g:

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^3z \\ 3y^2x^2z \\ x^2y^3 \end{pmatrix} \text{ und } \nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit eine Lösung von $\nabla_f(x,y,z) = \lambda\nabla_g(x,y,z)$ vorliegt, muss also $2xy^3z = 3y^2x^2z = x^2y^3$ gelten. Nun erhält man z.B. aus $2xy^3z = x^2y^3$, dass $x = 2z$ gilt und aus $3y^2x^2z = x^2y^3$, dass $y = 3z$ gilt. Aus der Nebenbedingung folgt damit $z = 12 - 2z - 3z$, somit $z = 2$. Schließlich erhalten wir $x = 2z = 4$ und $y = 3z = 6$. Die einzige Flachstelle ist somit $(4, 6, 2)$.

Aufgabe II.4* **(8 Punkte)**

Jede der folgenden reellen Funktionen

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = \sin(x), \qquad h(x) = \exp(x^2),$$

löst genau eine der folgenden Differentialgleichungen

$$y' = 2yx, \qquad y'' = -y, \qquad y' = y.$$

Ordnen Sie zu und begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe II.4 Es gilt:

$$f'(x) = e^x = f(x); \quad g''(x) = -\sin(x) = -g(x); \quad h'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = h(x) \cdot 2x,$$

Daraus folgt, dass f die Gleichung $y' = y$, g die Gleichung $y'' = -y$ und h die Gleichung $y' = 2yx$ löst.

Aufgabe II.5 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{x-y}$$

um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

Lösung zu Aufgabe II.5 Um die Formel aufzustellen, berechnen wir den Funktionswert, sowie alle einfachen und zweifachen partiellen Ableitungen am Punkt $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) = e^{x-y} &\Rightarrow f(0,0) = 1,\\
f_x(x,y) = e^{x-y} &\Rightarrow f_x(0,0) = 1,\\
f_y(x,y) = -e^{x-y} &\Rightarrow f_y(0,0) = -1,\\
f_{xx}(x,y) = e^{x-y} &\Rightarrow f_{xx}(0,0) = 1,\\
f_{xy}(x,y) = -e^{x-y} &\Rightarrow f_{xy}(0,0) = -1,\\
f_{yy}(x,y) = e^{x-y} &\Rightarrow f_{yy}(0,0) = 1.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Das Taylorpolynom ergibt sich zu

$$f(0,0) + (x,y)\cdot \operatorname{grad} f(0,0) + \frac{1}{2}(x,y)\cdot \operatorname{Hess} f(0,0)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2.$$

Aufgabe II.6 **(8 Punkte)**

Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = y^2 \cos(x), \qquad y(0) = 1.$$

Lösung zu Aufgabe II.6 Setze $f(x) := \cos(x)$ und $g(y) := y^2$. Damit erhalten wir

$$F(x) := \int_0^x \cos(t)\, dt = [\sin(t)]_0^x = \sin(x)$$

und

$$H(y) := \int_1^y t^{-2}\, dt = [-t^{-1}]_1^y = -y^{-1} + 1.$$

die gesuchte Lösung erhält man, wenn man

$$H(y(x)) = 1 - \frac{1}{y(x)} = \sin(x) = F(x)$$

nach $y(x)$ auflöst:

$$y(x) = \frac{1}{1 - \sin(x)}.$$