Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Fläche, welche durch die Kurven $y = 2x^4$ und $y = 4 - 2x^4$ eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie $\iint\limits_{\{x^2+y^2 \leqq 1\}} \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}(x, y)$ durch Einführen von Polarkoordinaten.

c) Berechnen Sie $\iiint\limits_K z^3\,\mathrm{d}(x, y, z)$ für $(x, y, z) \in K$ mit $K = [-1, 1] \times [-3, 3] \times [0, 2]$.

d) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Platte $P = \{(x, y) \mid y \geqq 0,\, x \geqq y,\, x^2 + y^2 \leqq 1\}$ bei konstanter Dichte ρ_0.

Lösung:

(a) Das gesuchte Flächenstück hat den Inhalt

$$\int_{-1}^{1} [(4 - 2x^4) - 2x^4]\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{4}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{5}.$$

(b) Nach Einführung von Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gilt mit der Transformationsregel

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2 \leqq 1} \sin(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sin(r^2) \cdot \underbrace{r}_{\text{Funktionaldeterminante}} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \sin(r^2) r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{2}\cos(r^2)\right]_0^1 = \pi(1 - \cos(1)).
\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_K z^3\,\mathrm{d}(x, y, z) &= \int_0^2 \int_{-3}^3 \int_{-1}^1 z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-1}^1 1\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-3}^3 1\,\mathrm{d}y \cdot \int_0^2 z^3\,\mathrm{d}z = 2 \cdot 6 \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{4}z^4\right]_0^2}_{=4} = 48.
\end{aligned}$$

(d) Die Koordinaten $(x_S, y_S)^\top$ des Schwerpunktes mit Dichtefunktion $\rho(x, y) \equiv \rho_0$ sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \frac{1}{\iint_P \rho_0\,\mathrm{d}(x, y)} \iint_P \rho_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}(x, y).$$

P ist ein Achtelkreis mit Radius 1. Daher ist

$$\rho_0 \iint_P 1 \,\mathrm{d}(x,y) = \rho_0 \cdot (\text{Flächeninhalt von } P) = \frac{1}{8}\pi\rho_0.$$

In Polarkoordinaten ist P gegeben durch

$$P = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \,|\, r \in [0,1],\ \varphi \in [0,\pi/4]\}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{8}{\pi} \iint_P x \,\mathrm{d}(x,y) = \frac{8}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r\cos(\varphi) \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{8}{\pi} \underbrace{\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1}_{=\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{[\sin(\varphi)]_0^{\pi/4}}_{=\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{4}{3\pi}\sqrt{2}, \\
y_S &= \frac{8}{\pi} \iint_P y \,\mathrm{d}(x,y) = \frac{8}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r\sin(\varphi) \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{8}{\pi} \underbrace{\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1}_{=\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{[-\cos(\varphi)]_0^{\pi/4}}_{=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{8-4\sqrt{2}}{3\pi}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Gegeben seien das Vektorfeld $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und der Körper $K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \text{ und } z \geqq 0\}$.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$.

b) Bestimmen Sie den Durchfluss $\int\limits_B \langle f, n\rangle \, \mathrm{d}\sigma$ aus K durch den Boden

$$B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \text{ und } z = 0\}.$$

c) Bestimmen Sie den Durchfluss $\int\limits_D \langle f, n\rangle \, \mathrm{d}\sigma$ aus K durch den Deckel

$$D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ und } z \geqq 0\}.$$

d) Sei $g = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ z + y^{14} \\ e^{z^2} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} g$ und das Wegintegral $\oint\limits_C \langle g, \mathrm{d}x\rangle$ zweiter Art, wobei $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ und } z = 0\}$.

Hinweis: Einige Aufgabenteile vereinfachen sich bei Verwendung von Integralsätzen erheblich.

Lösung:

Bemerkung: Die Durchlaufrichtung von C ist in Aufgabenteil **d)** frei wählbar. Damit können wir zwischen zwei Möglichkeiten für die Richtung des Normalenvektors wählen.

(a) Es ist $\operatorname{div} f = 3$ und $\operatorname{rot} f = (0,0,0)^\top$.

(b) Da der Fluss aus K gesucht ist, ist damit auch die Richtung des Normalenvektors eindeutig festgelegt. Es wird der bzgl. K nach außen weisende Normalenvektor benötigt.

Da B in der xy-Ebene liegt, verschwindet die z-Komponente von $f|_B$. Sei ν der bezüglich K nach außen weisende Normalenvektor. Dann gilt

$$\int_B \langle f, n\rangle \, \mathrm{d}\sigma = \int_B \langle f|_B, \nu\rangle \, \mathrm{d}\sigma = \int_B \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = 0.$$

(c) Es ist $\partial K = B \cup D$. Daher gilt nach dem Satz von Gauß:

$$\begin{aligned}\int_D \langle f, n\rangle \,\mathrm{d}\sigma &= \int_D \langle f, \nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_K \underbrace{\operatorname{div} f(x,y,z)}_{=3} \,\mathrm{d}(x,y,z) - \underbrace{\int_B \langle f, \nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma}_{=0} \\ &= 3 \cdot (\text{Volumen von } K) \\ &= 3 \cdot \frac{2}{3}\pi \cdot 2^3 = 16\pi,\end{aligned}$$

da K eine Halbkugel mit Radius 2 ist.

(d) Es ist

$$\operatorname{rot} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y e^{z^2} - \partial_z (z + y^{14}) \\ \partial_z \sin(x) - \partial_x e^{z^2} \\ \partial_x (z + y^{14}) - \partial_y \sin(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da C die Randkurve von B ist, gilt mit dem Satz von Stokes

$$\oint_C \langle g, \mathrm{d}x\rangle = \int_B \langle \operatorname{rot} g, \pm\nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_B \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = 0.$$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Gegeben seien die 2π-periodischen Fortsetzungen der Funktionen

$$f_1(x) = \cos(x) + \cos(3x),\ \text{für } x \in [0, 2\pi), \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [0, \pi], \\ -2, & \text{für } x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f_2.

b) Begründen Sie, dass die Fourierreihe von f_1 gleichmäßig gegen f_1 konvergiert.

c) Gegeben sei der Unterraum $S = \operatorname{span}\{\sin x, \cos 4x, \sin 3x\}$. Bestimmen Sie das Element von S, welches bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ den minimalen Abstand zu f_1 besitzt. Dabei ist

$$\|u\|_2 := \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

d) Sei $u(x,t)$ Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ mit 2π-periodischen Randbedingungen bezüglich x und den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f_1(x)$ und $\partial_t u(x,0) = 0$. Bestimmen Sie $u(\cdot, 1)$, d.h. die Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$.

Lösung:

(a) f_2 ist 2π-periodisch. Dann hat die zugehörige reelle Fourierreihe F_{f_2} die Form

$$F_{f_2}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Es ist

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} -2 \, \mathrm{d}x = -2.$$

Die Fourierkoeffizienten a_k, b_k sind dann für $k \geqq 1$ gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} -2\cos(kx) \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k} \sin(kx) \right]_\pi^{2\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} -2\sin(kx) \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_\pi^{2\pi} = -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{k} + \frac{1}{k}(-1)^k \right] = -\frac{2}{k\pi}[(-1)^k - 1].$$

(b) Die Funktion f_1 ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, also konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig.

(c) Die Vektoren, die S aufspannen, stehen bezüglich des L^2-Skalarproduktes senkrecht auf $\cos(\cdot)$ und $\cos(3\cdot)$. Daher ist das Element aus S, welches f_1 bestmöglich approximiert, die 0.

(d) u ist 2π-periodisch bezüglich x. Also können wir $u(\cdot,t)$ zu jedem Zeitpunkt t als Fourierreihe

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k(t)\cos(kx) + b_k(t)\sin(kx)\big)$$

schreiben. Da u die Wellengleichung $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ löst, folgern wir durch Einsetzen der obigen Fourierreihe und einen anschließenden Koeffizientenvergleich, dass die Koeffizientenfunktionen a_k und b_k den folgenden linearen Differentialgleichungen genügen müssen:

$$\begin{aligned} a_k''(t) &= -k^2 a_k(t), \\ b_k''(t) &= -k^2 b_k(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Um nun a_k und b_k eindeutig zu bestimmen, benötigen wir noch Anfangsbedingungen $a_k(0)$, $a_k'(0)$, $b_k(0)$, $b_k'(0)$.

Da $u(x,0) = f(x)$, haben wir zunächst die Bedingung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k(0)\cos(kx) + b_k(0)\sin(kx)\big) \stackrel{!}{=} \cos(x) + \cos(3x).$$

Da f bereits in der Form einer (abbrechenden) Fourierreihe gegeben ist, lassen sich die entsprechenden Koeffizienten leicht ablesen, so dass

$$b_k(0) = 0, \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \quad a_1(0) = 1,\, a_3(0) = 1,\, a_k(0) = 0, \text{ sonst.}$$

Analog liefert $\partial_t u(x,0) = 0$, dass $a_k'(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k'(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Mit Hilfe dieser Anfangsbedingungen erhalten wir dann aus (1), dass

$$a_1(t) = \cos(t),\; a_3(t) = \cos(3t)$$

und alle anderen Koeffizienten zu jedem Zeitpunkt verschwinden.

Damit ist $u(x,t) = \cos(t)\cos(x) + \cos(3t)\cos(3x)$ und speziell

$$u(x,1) = \cos(1)\cos(x) + \cos(3)\cos(3x).$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

a) Betrachten Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = x - x^7$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ und $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$ für die Lösung $t \mapsto x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = \frac{1}{2}$.

b) Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= \mu y + \cos(x).\end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Fixpunkte und untersuchen Sie deren Stabilität in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

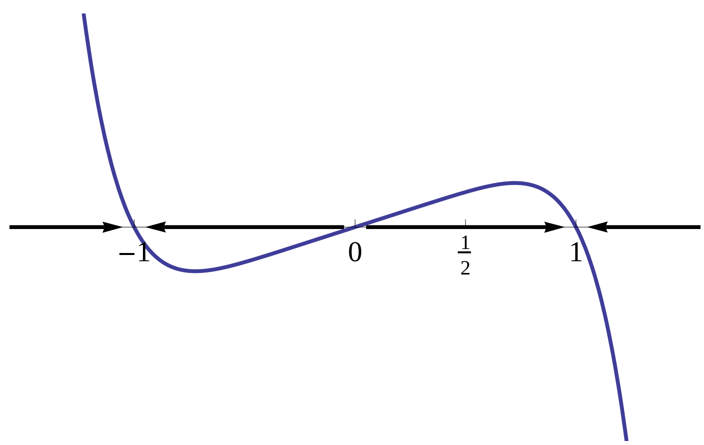
c) Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(x)$ der exakten Differentialgleichung

$$-12x^2(y - x^3) + 2(y - 2x^3)y' = 0$$

mit $y(0) = -1$.

Lösung:

(a) Die Differentialgleichung besitzt die beiden asymptotisch stabilen Fixpunkte ± 1 und den instabilen Fixpunkt 0. Da $x(0) \in (0,1)$, ist $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ und $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$, wie auch leicht aus dem Phasenporträt zu erkennen ist.



(b) Wir interpretieren das Differentialgleichungssystem als

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x, y).$$

Die Fixpunkte sind dann gegeben durch die Lösungen von $F(x, y) = (0, 0)^\top$. Es ergibt sich unmittelbar aus der ersten Zeile, dass $y = 0$ sein muss. Dann erhalten wir die unendlich vielen Fixpunkte $P_j((2j+1)\frac{\pi}{2}, 0)$ für $j \in \mathbb{Z}$. Die lineare Stabilität der Fixpunkte bestimmen wir mit Hilfe der Jacobimatrix

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(x) & \mu \end{pmatrix},$$

so dass

$$J_F((2j+1)\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{j+1} & \mu \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\det J_F(P_j) = (-1)^j$ und $\operatorname{spur} J_F(P_j) = \mu$ für $j \in \mathbb{Z}$. Sind λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von $J_F(P_j)$, so muss gelten

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det J_F(P_j), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{spur} J_F(P_j).$$

Im Fall, dass λ_1 nichtverschwindenden Imaginärteil besitzt, ist $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, da $J_F(P_j)$ reell ist. Dann ist $\operatorname{spur} J_F(P_j) = 2\operatorname{Re}\lambda_1$ und $\det J_F(P_j) = |\lambda_1|^2 > 0$.

- Im Fall $\mu > 0$ ist die Spur der Jacobimatrix stets positiv. Besitzt $J_F(P_j)$ nur reelle Eigenwerte, so muss also mindestens einer der Eigenwerte positiv sein.

  Besitzt $J_F(P_j)$ ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte, so muss mindestens ein Eigenwert positive Realteil besitzen.

  In jedem Fall sind für $\mu > 0$ alle Fixpunkte instabil.

- Falls $\mu < 0$, ist die Spur der Jacobimatrix stets negativ.

  Für ungerades $j \in \mathbb{Z}$ ist die Determinante der Jacobimatrix negativ, so dass nur rein reelle Eigenwerte vorliegen können, welche verschiedene Vorzeichen besitzen. Daher muss es einen positiven Eigenwert geben und die entsprechenden Fixpunkte sind instabil.

  Falls j gerade ist, sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden: Liegt ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte vor, so ist $2\mathrm{Re}\lambda_1 = 2\mathrm{Re}\lambda_2 = \mu < 0$.

  Sind beide Eigenwerte reell, so ist die Summe der beiden Eigenwerte negativ, aber das Produkt positiv. Damit müssen beide Eigenwerte negativ sein und die Fixpunkte asymptotisch stabil.

Zusammenfassend gilt also

	$\mu > 0$	$\mu < 0$
j gerade	P_j instabil	P_j stabil
j ungerade	P_j instabil	P_j instabil

(c) Gesucht ist eine Funktion $H(x, y)$, welche entlang von Lösungen konstant ist, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x, y(x)) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_x H(x, y) + \partial_y H(x, y) y' = 0.$$

Damit erhalten wir aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_x H(x, y) &\stackrel{!}{=} -12x^2(y - x^3) && \Rightarrow \quad H(x, y) = -4x^3 y + 2x^6 + c(y), \\ \partial_y H(x, y) = -4x^3 + c'(y) &\stackrel{!}{=} 2y - 4x^3 && \Rightarrow \quad \text{z.B.: } H(x, y) = y^2 - 4x^3 y + 2x^6. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösungen $y(x)$ durch Auflösen der impliziten Gleichung $H(x, y(x)) = c \in \mathbb{R}$, also

$$y(x) = 2x^3 \pm \sqrt{c + 2x^6}.$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung $y(0) = -1$ haben wir dann $y(x) = 2x^3 - \sqrt{1 + 2x^6}$.

Bemerkung: Es genügt nicht, die Lösung y in impliziter Form

$$y^2 - 4x^3 y + y^2 = 1$$

anzugeben, da diese Gleichung zwei Lösungen zulässt, nämlich $y_{1/2}(x) = 2x^3 \pm \sqrt{1 + 2x^6}$. Da allerdings $y_1(0) = 1$, kann dies keine Lösung des Anfangswertproblems sein.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie diejenige Möbiustransformation, welche -1 in -1, $3i$ in $-\frac{1}{3}i$ und 2 in $\frac{1}{2}$ abbildet.

b) Bestimmen Sie eine Funktion v zu $u = x^3 - 3xy^2$, so dass $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex differenzierbar ist.

c) Gegeben sei die komplex differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \text{ welche auf } K_1 = \{z = e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

die Werte $f(e^{i\varphi}) = 1 + 0i$ annimmt. Bestimmen Sie $f(0)$ und allgemein $f^{(n)}(0)$ für $n \in \mathbb{N}$.

d) Gegeben seien die Geraden $g_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ und $g_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$ sowie die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$h(z) = (z - \pi^3)^4.$$

Begründen Sie, wieso der Schnittwinkel der Bildkurven $h(g_1)$ und $h(g_2)$ im Bild des Schnittpunktes $45°$ beträgt.

e) Bestimmen Sie

$$\oint_{\{|z|=10\}} \frac{1}{z^2 - 5z + 4}\,\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \oint_{\{|z|=6\}} \frac{16}{(z-4)^6}\,\mathrm{d}z.$$

Lösung:

(a) Die gesuchte Möbiustransformation ist $z \mapsto \frac{1}{z}$.

(b) Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 \overset{!}{=} \partial_y v(x,y) & &\Rightarrow \quad v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + c(x), \\
-\partial_y u(x,y) &= -(-6xy) \overset{!}{=} \partial_x v(x,y) = 6xy + c'(x) & &\Rightarrow \quad v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + c,\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(c) Die konstante Abbildung $z \mapsto 1$ erfüllt die an f gestellten Bedingungen. Da nach der Cauchyschen Integralformel die Werte von f für z im Innern des Einheitskreises bereits eindeutig durch die Werte von f auf K_1 festgelegt sind, muss $f \equiv 1$ sein. Daher ist $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \geqq 1$.

(d) Wir haben $h'(z) = 4(z - \pi^3)^3$ und somit $h'(0) = -4\pi^9 \neq 0$. Damit ist $h'(z) \neq 0$ in einer Umgebung U des Ursprungs. Die Funktion h ist also eine konforme Abbildung auf U und damit winkelerhaltend. Da $g_1 \cap g_2 = \{0\}$ und sich die beiden Geraden dort im Winkel von $45°$ schneiden, ist die Behauptung gezeigt.

(e) i) Es ist $z^2 - 5z + 4 = (z-1)(z-4)$. Die beiden Singularitäten $z_1 = 1$ und $z_2 = 4$ liegen beide innerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius 10. Nach dem Residuensatz ist damit

$$\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 - 3z + 2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-5z+4}, 1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-5z+4}, 4\right)\right).$$

Da bei z_1 und z_2 jeweils Pole 1. Ordnung vorliegen, können die Residuen beispielweise durch die folgenden Formeln berechnet werden:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-5z+4}, 1\right) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{(z-1)(z-4)} = -\frac{1}{3},\\ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-5z+4}, 4\right) &= \left.\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^2-5z+4)}\right|_{z=4} = \frac{1}{2\cdot 4 - 5} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\oint_{|z|=10} \frac{1}{z^2-5z+4}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 0.$$

ii) Da $\frac{16}{(z-4)^6}$ bereits in Form einer Laurentreihe um den Entwicklungspunkt 4 gegeben ist, lässt sich sofort ablesen, dass das Residuum gleich 0 ist. Daher verschwindet auch das Integral.

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

a) Entwickeln Sie $f(z) = \frac{1}{z^2} e^{z^2} + \frac{1}{z-10}$ unter Verwendung der Exponentialreihe in eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, welche im Punkt $z = 5$ konvergiert.

Geben Sie die Koeffizienten von z^j für $j \in \{-2, -1, 0, 1\}$ explizit an.

b) Bestimmen Sie

$$\oint_{\{|z|=1\}} f(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \oint_{\{|z|=1\}} \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 7$.

Lösung:

(a) f besitzt Singularitäten in 0 und 10. Das Ringgebiet um 0, in dem f analytisch ist und welches 5 enthält, ist dann $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 10\}$. Damit ist insbesondere $\left|\frac{z}{10}\right| < 1$, so dass wir den zweiten Summanden in folgender Weise als geometrische Reihe schreiben können:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{2k} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{10}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{2k-2} - \frac{1}{10} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{10^j} z^j = \sum_{n=-2}^{\infty} a_n z^n.$$

Die gesuchten Koeffizienten sind dann

$$a_{-2} = 1,\ a_{-1} = 0,\ a_0 = \frac{9}{10},\ a_1 = -\frac{1}{100}.$$

(b) Damit ergibt sich sofort, dass $\mathrm{Res}(z \mapsto f(z), 0) = a_{-1} = 0$ und $\mathrm{Res}(z \mapsto f(z)/z^2, 0) = a_1 = -1/100$. Da der Einheitskreis nur die Singularität $z_0 = 0$ enthält, ergibt sich damit nach dem Residuensatz sofort:

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{50} i.$$

(c) Der Konvergenzradius der Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 7$ ist gegeben durch den Abstand von z_0 zur nächstliegenden Singularität von f. Da 10 näher an z_0 liegt als 0, ist der Konvergenzradius $R = |10 - 7| = 3$.