Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 − 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 − 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	$x\ln x - x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$	e^x
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	$\ln x$	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	e^x
$f(x)$	b^x	$\ln\|x\|$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 07.04.2014 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **07.04.2014** bis **11.04.2014** mit Elke Gangl (Raum 7.521) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*3 Punkte*) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge, die durch

$$f_0 := 0,\ f_1 := 1 \text{ und } f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$$

definiert ist. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} f_j^2 = f_n f_{n+1}.$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f für $x \neq 0$.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\left(f'\left(\frac{1}{2\pi n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Bestimmen Sie mittels Differenzenquotient die Ableitung von f an der Stelle $x = 0$.

(d) Ist f stetig differenzierbar?

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Sei t ein reeller Parameter. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + ty + z &= 0 \\ x + (1+2t)y + (t+2)z &= 0 \\ x + y + tz &= 0 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems.

(b) Für welche t ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

(c) Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(2x) \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 5 (*11 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 8\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 + 18 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik. Geben Sie alle auf dem Weg zur euklidischen Normalform verwendeten Koordinatensysteme an und skizzieren Sie die Quadrik und alle in Zwischenschritten verwendeten Koordinatensysteme im Ausgangskoordinatensystem.

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

(b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) Gegeben sei für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{x_1 x_2} \begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix}$$

sowie die Parametrisierung des Einheitskreises K_1

$$C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat, und geben Sie für diese α ein Potential an.

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{K_1} g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\displaystyle\int_{K_1} g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte z_0 und die Konvergenzradien ρ folgender Potenzreihen:

$\sum\limits_{n=1000}^{\infty} \frac{(z-\mathrm{i})^n}{2^n n^2}$	$z_0 =$	$\rho =$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(1+2\mathrm{i}+z)^n$	$z_0 =$	$\rho =$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n z^{3n}$	$z_0 =$	$\rho =$

Aufgabe 9 (*7 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x/2)$. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen von f im Punkt $x_0 = \pi$:

$f'(x_0) =$ ____, $f''(x_0) =$ ____, $f'''(x_0) =$ ____.

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 von f im Punkt $x_0 = \pi$.

$T_3(f, x, x_0) =$

(b) Sei $D = \left\{ (x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x + y \geqq -1 \right\}$. Gegeben sei die Funktion

$$g : D \to \mathbb{R} : (x,y)^\intercal \mapsto \sqrt{1 + 3x + y}.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von g im Punkt $a = (0,0)^\intercal$:

$\operatorname{grad} g(a) =$ ____ und $\mathrm{H}g(a) =$ ____

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 von g im Punkt $a = (0,0)^\intercal$:

$T_2(g, (x,y), a) =$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A.

$$\mathrm{Sp}(A) = \boxed{}$$

(b) Der Vektor $(1,1,1)^\intercal$ ist ein Eigenvektor von A. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1.

$$\lambda_1 = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$$

(d) Welche weiteren Eigenwerte außer λ_1 hat A?

$$\boxed{}$$

Aufgabe 11 (*5 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{x+1}{x^3+x}$.

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \boxed{}$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}\,x$.

$$\int \frac{x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$
