IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik 1 und 2

24. 2. 2014

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **el**, **kyb**, **mecha**, **phys**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 180 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle neun Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: 10** handbeschriebene Seiten DIN A4 sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erzielt werden.
- Bei **Aufgabe 1** ist für jede der Aussagen anzukreuzen, ob diese richtig bzw. falsch ist.
- Bei den **Aufgaben 2–3** werden nur Endergebnisse gewertet. Diese sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen. Rechenwege werden nicht berücksichtigt.
- Bei den **Aufgaben 4–9** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **4. 4. 2014** im LSF bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich zwischen **7. 4. 2014** und **11. 4. 2014** in Raum V57.8.160 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Name:		Matrikelnummer:	

Aufgabe 1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

(i) $\binom{9}{5} - \binom{8}{5} = \binom{8}{4}$

(ii) $(2+3\mathrm{i})^{-1} = (2-3\mathrm{i})$

(iii) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

(iv) $(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})}$

(v) $\ln 100 - \ln 99 = 1/x$ für ein $x \in [99, 100]$

(vi) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ für invertierbare Matrizen A und B

(vii) Das lineare Gleichungssystem $A^{\mathrm{t}}Ax = A^{\mathrm{t}}b$ ist für jede reelle Matrix A lösbar.

(viii) $\det A < 0 \implies \exists$ Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen.

(ix) $\operatorname{grad}(fg) = (\operatorname{grad} f)^{\mathrm{t}} \operatorname{grad} g$

(x) Ist die Determinante der Hesse-Matrix $(Hf)(x)$ negativ, so liegt bei x kein Minimum vor.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)
richtig										
falsch										

Aufgabe 2 (Angabe des Ergebnisses genügt) Berechnen Sie

(i) $\dfrac{\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{2 - 3\mathrm{i}} = \boxed{} + \boxed{}\ \mathrm{i}$, (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x \, dx = \boxed{}$

(iii) den Abstand des Punktes $P = (0, 2, 0)$ von der Ebene $E:\ 3x - 4z = 1$: $\boxed{}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} x^n = \boxed{}$, (v) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(3x)} = \boxed{}$

Aufgabe 3 (Angabe des Ergebnisses genügt)
(i) Normieren Sie die Vektoren $\vec{u} = (4, -1, 8)^{\mathrm{t}}, \vec{v} = (7, -4, -4)^{\mathrm{t}}$.
(ii) Ergänzen Sie $\vec{u}^{\circ}, \vec{v}^{\circ}$ durch $\vec{w}$ zu einem orthonormalen Rechtssystem
(iii) Wie lauten die Koeffizienten des Vektors $\vec{x} = (2, 0, -1)^{\mathrm{t}}$ bezüglich der Basis $\{\vec{u}^{\circ}, \vec{v}^{\circ}, \vec{w}^{\circ}\}$?
(iv) Berechnen Sie $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]$.
(v) Bestimmen Sie $\vec{y}$ durch Spiegeln von $\vec{x}$ an der durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene durch den Ursprung.

$\vec{u}^{\circ} = \boxed{}$, $\vec{v}^{\circ} = \boxed{}$, $\vec{w} = \boxed{}$, $\vec{y} = \boxed{}$

$\vec{x} = \boxed{}\ \vec{u}^{\circ} + \boxed{}\ \vec{v}^{\circ} + \boxed{}\ \vec{w}^{\circ}$, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \boxed{}$

Aufgabe 4
Berechnen Sie den Abstand der windschiefen Geraden

$$\begin{aligned} g_1: &\quad (0,1,4)^{\mathrm{t}} + t(-4,1,0)^{\mathrm{t}}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ g_2: &\quad (1,-1,0)^{\mathrm{t}} + s(0,1,-2)^{\mathrm{t}}, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils die Hesse-Normalform der Ebene E_k $(k = 1,2)$, die g_k und den Ursprung enthält, sowie den Winkel zwischen E_1 und E_2.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$r(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

sowie Asymptote und Extremum (x_*, y_*). Skizzieren Sie den Graph.
(r hat bei $x = 0$ einen Wendepunkt.)

Aufgabe 6
Berechnen Sie

$$\text{a)} \quad \int_0^\pi (2+x)\cos(3x)\,dx \qquad \text{b)} \quad \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{3+\mathrm{e}^x}\,dx \qquad \text{c)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{3x^2+1}$$

Aufgabe 7
Berechnen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 2 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Determinante der Matrix A und transformieren Sie es auf obere Dreiecksform. Geben Sie an, für welche Werte des Parameters t

a) keine b) genau eine c) unendlich viele

Lösungen existieren und bestimmen Sie die Lösung für $t = 2$ sowie alle Lösungen im Fall c).

Aufgabe 8
Bestimmen Sie die erste, zweite und n-te Ableitung der Funktion

$$f(t) = \ln(1+2t),$$

entwickeln Sie f in eine Taylor-Reihe um $t_0 = 0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.
Geben Sie ebenfalls die quadratische Taylor-Approximation von

$$g(x,y) = f(3x + y^2)$$

im Punkt $(0,0)$ an, sowie den Gradienten $\operatorname{grad} g(0,0)$ und die Hesse-Matrix $(Hg)(0,0)$.

Aufgabe 9
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

besitzt den Eigenwert 1. Bestimmen Sie zweiten Eigenwert sowie die Hauptachsenrichtungen, Hauptachsenlängen und Normalform der Quadrik

$$Q: \; x^{\mathrm{t}} A x = 6.$$

Um welche Kurve handelt es sich?