Lösungshinweise zur Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **el**, **kyb**,**mecha**,**phys**

Aufgabe 1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

(i) $\binom{9}{5} - \binom{8}{5} = \binom{8}{4}$

(ii) $(2+3\mathrm{i})^{-1} = (2-3\mathrm{i})$

(iii) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

(iv) $(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})}$

(v) $\ln 100 - \ln 99 = 1/x$ für ein $x \in [99, 100]$

(vi) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ für invertierbare Matrizen A und B

(vii) Das lineare Gleichungssystem $A^{\mathrm{t}}Ax = A^{\mathrm{t}}b$ ist für jede reelle Matrix A lösbar.

(viii) $\det A < 0 \implies \exists$ Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen.

(ix) $\operatorname{grad}(fg) = (\operatorname{grad} f)^{\mathrm{t}} \operatorname{grad} g$

(x) Ist die Determinante der Hesse-Matrix $(Hf)(x)$ negativ, so liegt bei x kein Minimum vor.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)
richtig										
falsch										

(i) richtig

(ii) falsch

(iii) richtig

(iv) falsch

(v) richtig

(vi) falsch

(vii) richtig

(viii) falsch

(ix) falsch

(x) falsch

Aufgabe 2 (Angabe des Ergebnisses genügt) Berechnen Sie

(i) $\dfrac{\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{2-3\mathrm{i}} = \boxed{} + \boxed{}\ \mathrm{i}$, (ii) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \cos^2 x\, dx = \boxed{}$

(iii) den Abstand des Punktes $P = (0, 2, 0)$ von der Ebene $E: 3x - 4z = 1$: $\boxed{}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} x^n = \boxed{}$, (v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\sin(3x)} = \boxed{}$

(i)
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, Erweitern mit komplex konjugiertem Nenner $\rightsquigarrow$

$$\frac{\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{2-3\mathrm{i}} = \frac{(\mathrm{i}-1)(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})} = \frac{2\mathrm{i}-3-2-3\mathrm{i}}{4+9} = -5/13 - \mathrm{i}/13$$

(ii)

$$\int_0^\pi \sin x \cos^2 x\, dx = \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi = 2/3$$

(iii) Hesse Normalform

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z = \frac{1}{5}$$

P eingesetzt $\rightsquigarrow d = 1/5$
(iv) Umformung zur Exponentialreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} x^n = \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n)!} - 1\right) = \frac{\exp(2x)-1}{2x}$$

(v) Regel von l'Hospital $\rightsquigarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)}{3\cos(3x)} = 0$$

Aufgabe 3 (Angabe des Ergebnisses genügt)
(i) Normieren Sie die Vektoren $\vec{u} = (4, -1, 8)^{\mathrm{t}}, \vec{v} = (7, -4, -4)^{\mathrm{t}}$.
(ii) Ergänzen Sie $\vec{u}^\circ, \vec{v}^\circ$ durch $\vec{w}$ zu einem orthonormalen Rechtssystem
(iii) Wie lauten die Koeffizienten des Vektors $\vec{x} = (2, 0, -1)^{\mathrm{t}}$ bezüglich der Basis $\{\vec{u}^\circ, \vec{v}^\circ, \vec{w}^\circ\}$?
(iv) Berechnen Sie $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]$.
(v) Bestimmen Sie $\vec{y}$ durch Spiegeln von $\vec{x}$ an der durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene durch den Ursprung.

$$\vec{u}^\circ = \boxed{}, \quad \vec{v}^\circ = \boxed{}, \quad \vec{w} = \boxed{}, \quad \vec{y} = \boxed{}$$

$$\vec{x} = \boxed{}\,\vec{u}^\circ + \boxed{}\,\vec{v}^\circ + \boxed{}\,\vec{w}^\circ, \qquad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \boxed{}$$

(i)

$$|\vec{u}| = \sqrt{16 + 1 + 64} = 9\,, \quad |\vec{v}| = \sqrt{49 + 16 + 16} = 9$$

$\rightsquigarrow$

$$\vec{u}^\circ = \frac{1}{9}(4, -1, 8)^{\mathrm{t}}\,, \quad \vec{v}^\circ = \frac{1}{9}(7, -4, -4)^{\mathrm{t}}$$

(ii)

$$\vec{w} = \vec{w}^\circ = \vec{u}^\circ \times \vec{v}^\circ = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 36 \\ 72 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(iii) $\vec{x} = (2, 0, -1)^{\mathrm{t}}$

$\alpha = \vec{x} \cdot \vec{u}^\circ = (8 + 0 - 8)/9 = 0\,,\ \beta = \vec{x} \cdot \vec{v}^\circ = (14 + 0 + 4)/9 = 2\,,\ \gamma = \vec{x} \cdot \vec{w}^\circ = (8 + 0 + 1)/9 = 1$

(iv)

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = 81 \cdot [\vec{u}^\circ, \vec{v}^\circ, 2\vec{v}^\circ + \vec{w}^\circ] = 81(0 + 1) = 81$$

(v) $E : s\vec{u} + t\vec{v}\,, \quad s, t \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = 2\vec{v}^\circ + \vec{w}^\circ \implies \vec{x} - \vec{w}^\circ \in E$$

$\rightsquigarrow$

$$\vec{y} = \vec{x} - 2\vec{w}^\circ = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4
Berechnen Sie den Abstand der windschiefen Geraden

$$\begin{aligned} g_1: &\quad (0,1,4)^{\mathrm{t}} + t(-4,1,0)^{\mathrm{t}}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ g_2: &\quad (1,-1,0)^{\mathrm{t}} + s(0,1,-2)^{\mathrm{t}}, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils die Hesse-Normalform der Ebene E_k $(k = 1,2)$, die g_k und den Ursprung enthält, sowie den Winkel zwischen E_1 und E_2.

(i) Formel für den Abstand windschiefer Geraden $\rightsquigarrow$

$$d = \frac{|[(-1,2,4)^{\mathrm{t}}, (-4,1,0)^{\mathrm{t}}, (0,1,-2)^{\mathrm{t}}]|}{|(-4,1,0)^{\mathrm{t}} \times (0,1,-2)^{\mathrm{t}}|}$$

$(-4,1,0)^{\mathrm{t}} \times (0,1,-2)^{\mathrm{t}} = (-2,-8,-4)^{\mathrm{t}} \qquad \Longrightarrow$

$$d = \frac{|2-16-16|}{\sqrt{4+64+16}} = \frac{30}{\sqrt{84}} = \frac{15}{\sqrt{21}}$$

(ii) Ebene E_1 durch g_1 und $O \rightsquigarrow$ aufspannende Richtungen :

$$(0,1,4)^{\mathrm{t}}, \ (-4,1,0)^{\mathrm{t}}$$

Kreuzprodukt $\rightsquigarrow$ Normale

$$\vec{n_1} = (-4,-16,4)^{\mathrm{t}}, \ \vec{n_1}^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{6}(-1,-4,1)^{\mathrm{t}}$$

Hesse Normalform:

$$E_1: \quad \frac{\sqrt{2}}{6}(-x-4y+z) = 0$$

(iii) Alternative Berechnung für E_2
$(1,-1,0)$ und $(0,0,0) \in E_2 \implies$

$$E_2: \quad x + y + \gamma z = 0$$

$(0,1,-2)^{\mathrm{t}} \perp (1,1,\gamma)^{\mathrm{t}} \implies \gamma = 1/2$
Normierung $\rightsquigarrow$ Hesse Normalform:

$$E_2: \quad \frac{1}{3}(2x+2y+z) = 0$$

(iv) Winkel zwischen E_1 und $E_2 \equiv$ (kleinerer) Winkel zwischen Normalen

$$\cos\varphi = |\vec{n_1}^{\circ} \cdot \vec{n_2}^{\circ}| = \frac{\sqrt{2}}{18}|(-2-8+1)| \implies \varphi = \pi/4$$

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$r(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

sowie Asymptote und Extremum (x_*, y_*). Skizzieren Sie den Graph.
(r hat bei $x = 0$ einen Wendepunkt.)

(i) Polynomdivision:

$$r(x) = \frac{x(x^2+2x+1) - 2(x^2+2x+1) + 3x + 2}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

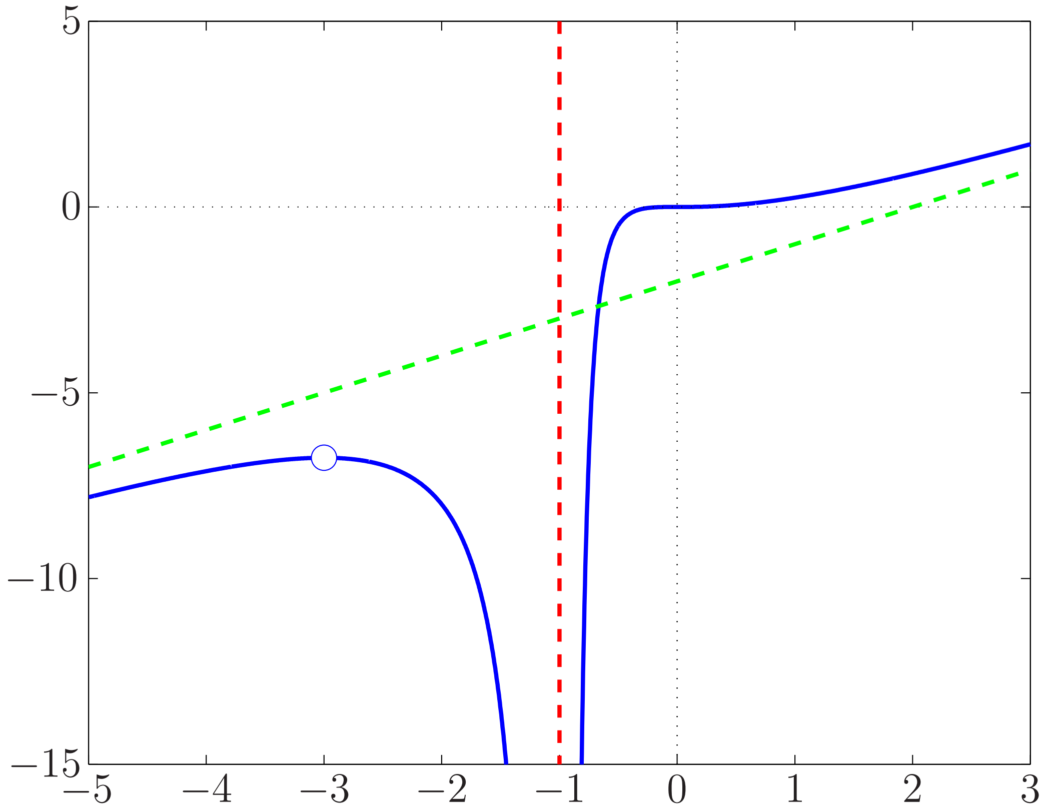
$\rightsquigarrow$ Asymptote: $y = x - 2$
Partialbruchzerlegung, Doppelte Polstelle $x = -1 \rightsquigarrow$ Ansatz

$$\frac{x^3}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

Grenzwertmethode, Multiplikation mit $(x+1)^2$ und Setzen von $x = -1 \implies b = (-1)^3 = -1$
Testen an 0 $\implies 0 = 0 - 2 + a + b \rightsquigarrow a = 2 - b = 3$
(ii) Kritischer Punkt:

$$0 = r'(x) = 1 + \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+1)^2} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2 - 3x - 3 = x^3 + 3x^2 = 0$$

$\rightsquigarrow$ Wendepunkt an 0 und $x_* = -3\,, y_* = (-3)^3/(-3+1)^2 = -27/4$
(iii) Skizze:



Aufgabe 6
Berechnen Sie

$$\text{a)}\quad \int_0^{\pi} (2+x)\ \cos(3x)\,dx \qquad \text{b)}\quad \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{3+\mathrm{e}^x}\,dx \qquad \text{c)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{3x^2+1}$$

---

a)
partielle Integration $\rightsquigarrow$

$$\int_0^{\pi} \underbrace{(2+x)}_{u}\underbrace{\cos(3x)}_{v'}\,dx = \underbrace{\left[(2+x)\,\frac{1}{3}\,\sin(3x)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin(3x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{9}\cos(3x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{9}(-1-1) = -\frac{2}{9}$$

b)
Substitution $u = \mathrm{e}^x$, $du = \mathrm{e}^x\,dx \rightsquigarrow$

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{3+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{e}^x\,dx = \int \frac{u}{3+u}\,du = \int 1 - \frac{3}{3+u}\,du$$

Stammfunktion und Rücksubstitution $\rightsquigarrow$

$$u - 3\ln|3+u| + c = \mathrm{e}^x - 3\ln|3+\mathrm{e}^x| + c$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{3x^2+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2}\,\sqrt{3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan(x\sqrt{3})\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 7
Berechnen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b\,, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 2 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Determinante der Matrix A und transformieren Sie es auf obere Dreiecksform. Geben Sie an, für welche Werte des Parameters t

a) keine b) genau eine c) unendlich viele

Lösungen existieren und bestimmen Sie die Lösung für $t = 2$ sowie alle Lösungen im Fall c).

(i) Entwicklung nach 2. Spalte $\rightsquigarrow$

$$\det A = 1(1 - t^2)$$

$\implies$ genau eine Lösung (Fall b)) für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ t & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Zeile 2 $-$ 2 $\times$ Zeile 1
Zeile 3 $-$ t $\times$ Zeile 1 $\rightsquigarrow$ Dreiecksform

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & 2-2t & -2 \\ 0 & 0 & 1-t^2 & 1-t \end{array}$$

$t = -1 \rightsquigarrow$ 3. Gleichung unlösbar, also keine Lösung (Fall a))
$t = 1 \rightsquigarrow$ 3. Zeile nur Nullen, also unendlich viele Lösungen (Fall c))
Gleichungssystem für $t = 1$:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Lösungsmenge direkt ablesbar:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Gleichungssystem für $t = 2$:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}$$

Lösung:

$$x = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8
Bestimmen Sie die erste, zweite und n-te Ableitung der Funktion

$$f(t) = \ln(1+2t)\,,$$

entwickeln Sie f in eine Taylor-Reihe um $t_0 = 0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius. Geben Sie ebenfalls die quadratische Taylor-Approximation von

$$g(x,y) = f(3x+y^2)$$

im Punkt $(0,0)$ an, sowie den Gradienten $\operatorname{grad} g(0,0)$ und die Hesse-Matrix $(Hg)(0,0)$.

(i) $f(t) = \ln(1+2t)$:
Ableitungen

$$\begin{aligned} f' &= \frac{2}{1+2t} \\ f'' &= \frac{-4}{(1+2t)^2} \\ &\vdots \\ f^{(n)} &= (-1)^{n-1}2^n(1+2t)^{-n}(n-1)! \end{aligned}$$

Auswerten am Entwicklungspunkt $t_0 = 0 \rightsquigarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(2t)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n} t^n$$

(Auch: direkt durch Einsetzen von $2t$ in die bekannte Reihe von $\ln(1+x)$)
Konvergenzradius:

$$r^{-1} = \overline{\lim_{n to \infty}} \sqrt[n]{2^n/n} = 2$$

(Auch: Konvergenzradius 1 der Reihe für $\ln(1+x) \implies$ Konvergenzradius $r = \frac{1}{2}$)
(ii) $g(x,y) = f(3x+y^2)$:
Einsetzen in quadratisches Taylor-Polynom für $f : 2t - 2t^2$
$\rightsquigarrow$

$$2(3x+y^2) - 2(3x+y^2)^2 = 6x + 2y^2 - 18x^2 + \cdots$$

(iii) Gradient und Hesse-Matrix

$$6x + 2y^2 - 18x^2 = g(0,0) + (\operatorname{grad} g(0,0))^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)(Hg)(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\implies \operatorname{grad} g(0,0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (Hg)(0,0) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

besitzt den Eigenwert 1. Bestimmen Sie zweiten Eigenwert sowie die Hauptachsenrichtungen, Hauptachsenlängen und Normalform der Quadrik

$$Q: \; x^{\mathrm{t}} A x = 6\,.$$

Um welche Kurve handelt es sich?

(i) zweiter Eigenwert:
$\lambda_1 = 1$, Spur $A = 5 + 2 = 7 \implies \lambda_2 = 6$
(ii) Hauptachsenrichtungen = Eigenvektoren

$$(A - E)v = \begin{pmatrix} 5-1 & 2 \\ 2 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\implies v = (1, -2)^{\mathrm{t}}$
Symmetrie von $A \implies$ Orthogonalität der Eigenvektoren
$\rightsquigarrow$ zweiter Eigenvektor $w = (2, 1)^t$
(iii) Normalform des Kegelschnitts:

$$Q: \; x^t A x = 6$$

Substitution $x = (v^\circ, w^\circ)y$ und Division durch $-6 \rightsquigarrow$ Normalform

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{y_1^2}{6} - y_2^2 + 1 = 0$$

Ellipse mit Hauptachsenlängen $\sqrt{6}$ und 1 .