Lösungshinweise zur Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **el**

Aufgabe 1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

(i) $\operatorname{div}(U\vec{F}) = (\operatorname{div}\vec{F})(\operatorname{grad} U)$

(ii) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \vec{0}$

(iii) Der Fluss der Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes durch eine Kugeloberfläche ist null.

(iv) Jedes radiale Vektorfeld $f(r)\vec{e}_r$ mit einer stetigen Funktion f besitzt ein (skalares) Potential.

(v) Das Vektorfeld $\vec{F} = (y, -x, z)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein (skalares) Potential.

(vi) Das Arbeitsintegral jedes Vektorfeldes über einen geschlossenen Weg ist null.

(vii) Das Vektorfeld $\vec{F} = (x, 0, yz)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein Vektorpotential.

(viii) Besitzt $\vec{F}$ ein Vektorpotential, so ist der Fluss von $\vec{F}$ durch jede Fläche null.

(ix) Die Differentialgleichung $ydx + xdy = 0$ ist exakt.

(x) Alle Lösungen der Differentialgleichung $u'' = -u$ sind periodisch.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)
richtig										
falsch										

(i) falsch

(ii) richtig

(iii) richtig

(iv) richtig

(v) falsch

(vi) falsch

(vii) falsch

(viii) falsch

(ix) richtig

(x) richtig

Aufgabe 2 (Angabe des Ergebnisses genügt)
Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ über

		Integral =
a) das Geradensegment	$C: \ t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t, t), \quad 0 \le t \le 1$	
b) das Dreieck	$D: \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ z = 0$	
c) den Würfel	$V = [0, 1]^3$	
d) den Zylinder	$Z: \ \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \le 1,\ 0 \le z \le 1$	
e) den Mantel	$S: \ \varrho = 1,\ 0 \le z \le 1$ des Zylinders Z	

---

a) $\int_0^1 3t^2\,|(1,1,1)|\,dt = \sqrt{3}$

b) $\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + y^2\,dydx = \int_0^1 (1-x)x^2 + (1-x)^3/3\,dx = 1/3 - 1/4 + 1/12 = 1/6$

c) Symmetrie $\rightsquigarrow 3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2\,dxdydz = 1$

d) $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\varrho^2 + z^2)\varrho\,d\varrho d\varphi dz = 2\pi(1/4 + 1/3 \cdot 1/2) = 5\pi/6$

e) $\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + z^2)\,d\varphi dz = 2\pi(1 + 1/3) = 8\pi/3$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie für die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = xy^2 \qquad \text{b) } y' = y + x^2 \qquad \text{c) } (x+y)dx + (x+1)dy = 0$$

die allgemeine Lösung sowie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

---

a) Separabel: $y'/y^2 = x$. Integration $\rightsquigarrow$

$$-1/y = x^2/2 + c \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-1}{c + x^2/2}$$

Anfangsbedingung $y(0) = 1 \implies c = -1$

b) Linear: $y = y_h + y_p$

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y' = y \quad \implies \quad y_h = p\mathrm{e}^x$$

partikuläre Lösung mit Ansatz: $y_p = ax^2 + bx + c \rightsquigarrow$

$$2ax + b = ax^2 + bx + c + x^2$$

$\implies \quad a = -1,\ b = -2,\ c = -2$

Anfangsbedingung $y(0) = 1 \implies$

$$1 = y_h(0) + y_p(0) = p - 2, \quad \text{d.h.}\ p = 3$$

c) Exakt, da $\partial_y(x+y) = 1 = \partial_x(x+1) \rightsquigarrow F(x,y) = 0$

$$\begin{aligned} F_x &= x + y \quad \implies \quad F = x^2/2 + xy + g(y) \\ F_y &= x + g'(y) = x + 1 \quad \implies \quad g(y) = y - c \end{aligned}$$

d.h. $F(x,y) = x^2/2 + xy + y - c$

Anfangsbedingung $y(0) = 1 \quad \implies$

$$0 = F(0,1) = 1 - c, \quad \text{d.h.}\ c = 1 \quad \text{und} \quad y = \frac{1 - x^2/2}{1 + x}$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$u'' + 4u = \cos(3t)$$

a) eine partikuläre Lösung,
b) die allgemeine Lösung,
c) die Lösung zu den Anfangsbedingungen $u(0) = 1$, $u'(0) = -2$ und deren Laplace-Transformierte.

---

a) Partikuläre periodische Lösung mit Ansatz: $u_p = c\cos(3t) \rightsquigarrow$

$$-9c\cos(3t) + 4c\cos(3t) = \cos(3t) \implies \quad c = -1/5$$

b) Allgemeine Lösung $u = u_h + u_p$ mit u_h der Lösung der homogenen Differentialgleichung, d.h.

$$u_h = a\cos(2t) + b\sin(2t)$$

$\rightsquigarrow u = a\cos(2t) + b\sin(2t) - \cos(3t)/5$

c) Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{rcccl} 1 & = & u(0) & = & a + 0 - 1/5 \\ -2 & = & u'(0) & = & 0 + 2b - 0 \end{array}$$

$\implies a = 6/5$, $b = -1$

Laplace-Transformierte:

$$s^2U - s - (-2) + 4U = \frac{s}{s^2+9}$$

$\implies$

$$U = \frac{1}{s^2+4}\left(\frac{s}{s^2+9} + s - 2\right) = \frac{s^3 - 2s^2 + 10s - 18}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

Alternative: direkte Transformation der Lösung

$$u = \frac{6}{5}\cos(2t) - \sin(2t) - \frac{1}{5}\cos(3t) \rightsquigarrow \frac{6}{5}\,\frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+9}$$

Aufgabe 5 Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (y+z, yz, x^2)^{\mathrm{t}}$$

a) $\operatorname{div} \vec{F}$ und $\operatorname{rot} \vec{F}$,
b) den Fluss durch die Kreisscheibe

$$D:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, z = 0$$

nach unten,
c) den Fluss durch die Halbkugelschale

$$S:\, r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, z \geq 0$$

nach außen.

---

a) Divergenz und Rotation:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + z + 0 = z, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = (-y, 1-2x, -1)^{\mathrm{t}}$$

b) Fluss durch die Kreisscheibe:

$$\vec{F}_{|D} = (y, 0, x^2)^{\mathrm{t}}, \quad d\vec{S} = (0,0,-1)^{\mathrm{t}} dxdy$$

Polarkoordinaten $\rightsquigarrow$

$$I_D = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \varphi \, r d\varphi dr = -\pi/4$$

c) Fluss durch die Halbkugeloberfläche (Schale und Boden):
Satz von Gauß $\implies$

$$I_H = \iint_{\partial H} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_H \operatorname{div} \vec{F} \, dH$$

Kugelkoordinaten $\rightsquigarrow$

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (r \cos \vartheta) \, r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = [r^4/4]_0^1 \cdot [\sin^2 \vartheta/2]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \pi/4$$

$\rightsquigarrow$ Fluss durch die Halbkugelschale:

$$I_S = I_H - I_D = \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2$$

Aufgabe 6 Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (3 - 2y, 3y^2 - 2x)^{\mathrm{t}}$$

ein Potential und berechnen Sie

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{sowie} \quad \int_C \vec{F} \times d\vec{r}$$

für den Weg

$$C:\; t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t^2),\, 0 \le t \le 1.$$

Potential:
Integration bzgl. $x \rightsquigarrow$

$$U_x = 3 - 2y \quad \Longrightarrow \quad U = 3x - 2xy + f(y)$$

Ableitung nach $y \rightsquigarrow$

$$0 - 2x + f'(y) = U_y = 3y^2 - 2x \;\Longrightarrow\quad f(y) = y^3 + c,\ \text{d.h.}\, U = 3x - 2xy + y^3 + c$$

Alternative: Integration bzgl. y, dann Ableitung nach x
Arbeitsintegral:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(1,1) - U(0,0) = 3 - 2 + 1 = 2$$

Flussintegral:

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3 - 2t^2 \\ 3t^4 - 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (8t - 4t^3 - 3t^4) dt = 4 - 1 - 3/5 = 12/5$$