# Lösungshinweise zur Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **kyb**,**mecha**,**phys**

**Aufgabe 1** Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

(i) $\operatorname{div}(U\vec{F}) = (\operatorname{div}\vec{F})(\operatorname{grad} U)$

(ii) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \vec{0}$

(iii) Der Fluss der Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes durch eine Kugeloberfläche ist null.

(iv) Jedes radiale Vektorfeld $f(r)\vec{e}_r$ mit einer stetigen Funktion $f$ besitzt ein (skalares) Potential.

(v) Das Vektorfeld $\vec{F} = (y, -x, z)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein (skalares) Potential.

(vi) Das Arbeitsintegral jedes Vektorfeldes über einen geschlossenen Weg ist null.

(vii) Das Vektorfeld $\vec{F} = (x, 0, yz)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein Vektorpotential.

(viii) Besitzt $\vec{F}$ ein Vektorpotential, so ist der Fluss von $\vec{F}$ durch jede Fläche null.

(ix) Die Differentialgleichung $ydx + xdy = 0$ ist exakt.

(x) Alle Lösungen der Differentialgleichung $u'' = -u$ sind periodisch.

| | (i) | (ii) | (iii) | (iv) | (v) | (vi) | (vii) | (viii) | (ix) | (x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| richtig | | | | | | | | | | |
| falsch | | | | | | | | | | |

(i) falsch

(ii) richtig

(iii) richtig

(iv) richtig

(v) falsch

(vi) falsch

(vii) falsch

(viii) falsch

(ix) richtig

(x) richtig

**Aufgabe 2** (Angabe des Ergebnisses genügt)

Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ über

| | | Integral = |
|---|---|---|
| a) das Geradensegment | $C:\ t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t, t), \quad 0 \le t \le 1$ | |
| b) das Dreieck | $D:\ 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 - x,\, z = 0$ | |
| c) den Würfel | $V = [0, 1]^3$ | |
| d) den Zylinder | $Z:\ \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \le 1,\, 0 \le z \le 1$ | |
| e) den Mantel | $S:\ \varrho = 1,\, 0 \le z \le 1$ des Zylinders $Z$ | |

---

a) $\int_0^1 3t^2\, |(1, 1, 1)|\, dt = \sqrt{3}$

b) $\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + y^2\, dy dx = \int_0^1 (1 - x)x^2 + (1 - x)^3/3\, dx = 1/3 - 1/4 + 1/12 = 1/6$

c) Symmetrie $\rightsquigarrow 3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2\, dx dy dz = 1$

d) $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\varrho^2 + z^2)\varrho\, d\varrho d\varphi dz = 2\pi(1/4 + 1/3 \cdot 1/2) = 5\pi/6$

e) $\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + z^2)\, d\varphi dz = 2\pi(1 + 1/3) = 8\pi/3$

**Aufgabe 3** Geben Sie für den Körper $V : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x(1-x),\ 0 \le z \le 3$ und die Schnittfläche $A$ (grau) von $V$ mit der $xy$-Ebene die folgenden Größen an:

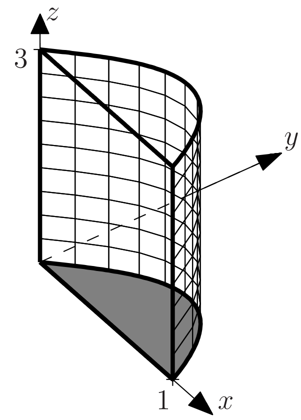
a) den Flächeninhalt von $A$

b) das Volumen von $V$

c) das Integral von $f(x,y,z) = z^2$ über $V$

d) die $y$-Komponente des Schwerpunktes von $V$

e) $\iiint_V (1-y)\,dV$




a)

$$\text{area}\,A = \int_0^1 x(1-x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

b)

$$\text{vol}\,V = 3\ \text{area}\,A = \frac{1}{2}$$

c)

$$\iiint_V f dV = \int_0^1 \int_0^{x(1-x)} \int_0^3 z^2\,dzdydx = \text{area}\,A\ \left[z^3/3\right]_0^3 = \frac{3}{2}$$

d)

$$\begin{aligned} S_y &= 2\int_0^1 \int_0^{x(1-x)} \int_0^3 y\,dzdydx \\ &= 3\int_0^1 (x(1-x))^2\,dx = 3\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

e)

$$\iiint_V (1-y)\,dV = \text{vol}\,V - \frac{1}{2}S_y = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$$

**Aufgabe 4** Bestimmen Sie für die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = xy^2 \qquad \text{b) } y' = y + x^2 \qquad \text{c) } (x+y)dx + (x+1)dy = 0$$

die allgemeine Lösung sowie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

---

a) Separabel: $y'/y^2 = x$. Integration $\rightsquigarrow$

$$-1/y = x^2/2 + c \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-1}{c + x^2/2}$$

Anfangsbedingung $y(0) = 1 \implies c = -1$

b) Linear: $y = y_h + y_p$

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y' = y \quad \implies \quad y_h = p\mathrm{e}^x$$

partikuläre Lösung mit Ansatz: $y_p = ax^2 + bx + c \rightsquigarrow$

$$2ax + b = ax^2 + bx + c + x^2$$

$\implies \quad a = -1,\ b = -2,\ c = -2$

Anfangsbedingung $y(0) = 1 \implies$

$$1 = y_h(0) + y_p(0) = p - 2, \quad \text{d.h. } p = 3$$

c) Exakt, da $\partial_y(x+y) = 1 = \partial_x(x+1) \rightsquigarrow F(x,y) = 0$

$$\begin{aligned} F_x &= x + y \quad \implies \quad F = x^2/2 + xy + g(y) \\ F_y &= x + g'(y) = x + 1 \quad \implies \quad g(y) = y - c \end{aligned}$$

d.h. $F(x,y) = x^2/2 + xy + y - c$

Anfangsbedingung $y(0) = 1 \quad \implies$

$$0 = F(0,1) = 1 - c, \quad \text{d.h. } c = 1 \quad \text{und} \quad y = \frac{1 - x^2/2}{1 + x}$$

**Aufgabe 5** Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$u'' + 4u = \cos(3t)$$

a) eine partikuläre Lösung,
b) die allgemeine Lösung,
c) die Lösung zu den Anfangsbedingungen $u(0) = 1$, $u'(0) = -2$ und deren Laplace-Transformierte.

---

a) Partikuläre periodische Lösung mit Ansatz: $u_p = c\cos(3t) \rightsquigarrow$

$$-9c\cos(3t) + 4c\cos(3t) = \cos(3t) \implies \quad c = -1/5$$

b) Allgemeine Lösung $u = u_h + u_p$ mit $u_h$ der Lösung der homogenen Differentialgleichung, d.h.

$$u_h = a\cos(2t) + b\sin(2t)$$

$\rightsquigarrow u = a\cos(2t) + b\sin(2t) - \cos(3t)/5$

c) Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{rcccl} 1 & = & u(0) & = & a + 0 - 1/5 \\ -2 & = & u'(0) & = & 0 + 2b - 0 \end{array}$$

$\implies a = 6/5,\ b = -1$

Laplace-Transformierte:

$$s^2 U - s - (-2) + 4U = \frac{s}{s^2+9}$$

$\implies$

$$U = \frac{1}{s^2+4}\left(\frac{s}{s^2+9} + s - 2\right) = \frac{s^3 - 2s^2 + 10s - 18}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

**Alternative:** direkte Transformation der Lösung

$$u = \frac{6}{5}\cos(2t) - \sin(2t) - \frac{1}{5}\cos(3t) \rightsquigarrow \frac{6}{5}\,\frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+9}$$

**Aufgabe 6** Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (y + z, yz, x^2)^{\mathrm{t}}$$

a) div $\vec{F}$ und rot $\vec{F}$,
b) den Fluss durch die Kreisscheibe

$$D:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, z = 0$$

nach unten,
c) den Fluss durch die Halbkugelschale

$$S:\, r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, z \geq 0$$

nach außen.

---

a) Divergenz und Rotation:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + z + 0 = z, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = (-y, 1 - 2x, -1)^{\mathrm{t}}$$

b) Fluss durch die Kreisscheibe:

$$\vec{F}_{|D} = (y, 0, x^2)^{\mathrm{t}}, \quad d\vec{S} = (0, 0, -1)^{\mathrm{t}} dxdy$$

Polarkoordinaten $\rightsquigarrow$

$$I_D = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \varphi \, r d\varphi dr = -\pi/4$$

c) Fluss durch die Halbkugeloberfläche (Schale und Boden):
Satz von Gauß $\implies$

$$I_H = \iint_{\partial H} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_H \operatorname{div} \vec{F} \, dH$$

Kugelkoordinaten $\rightsquigarrow$

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (r \cos \vartheta) \, r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = [r^4/4]_0^1 \cdot [\sin^2 \vartheta/2]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \pi/4$$

$\rightsquigarrow$ Fluss durch die Halbkugelschale:

$$I_S = I_H - I_D = \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2$$

**Aufgabe 7** Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (3 - 2y, 3y^2 - 2x)^{\mathrm{t}}$$

ein Potential und berechnen Sie

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{sowie} \quad \int_C \vec{F} \times d\vec{r}$$

für den Weg

$$C:\ t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t^2),\ 0 \le t \le 1.$$

---

Potential:
Integration bzgl. $x \rightsquigarrow$

$$U_x = 3 - 2y \quad \Longrightarrow \quad U = 3x - 2xy + f(y)$$

Ableitung nach $y \rightsquigarrow$

$$0 - 2x + f'(y) = U_y = 3y^2 - 2x \implies \quad f(y) = y^3 + c, \text{ d.h. } U = 3x - 2xy + y^3 + c$$

Alternative: Integration bzgl. $y$, dann Ableitung nach $x$
Arbeitsintegral:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(1,1) - U(0,0) = 3 - 2 + 1 = 2$$

Flussintegral:

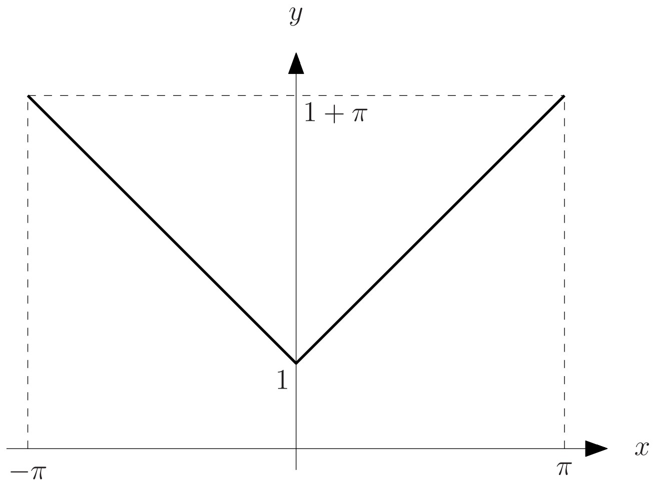
$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3 - 2t^2 \\ 3t^4 - 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (8t - 4t^3 - 3t^4) dt = 4 - 1 - 3/5 = 12/5$$

**Aufgabe 8** Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = 1 + |x|$, $-\pi \leq x < \pi$, und bestimmen Sie
a) Real- und Imaginärteil der Fourier-Transformierten der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } -\pi \leq x < \pi, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) die komplexen Fourier-Koeffizienten $c_k$ und die reellen Fourier-Koeffizienten $a_k$ und $b_k$ der $2\pi$-periodischen Fortsetzung von $f$,
c) den Wert der Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k$.

Skizze




a) Fourier-Transformierte:

$$\hat{g}(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(xy)\,dx - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(xy)\,dx$$

$f$ gerade $\implies \operatorname{Im}\hat{g} = 0$
partielle Integration $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\hat{g}(y) &= 2\int_0^{\pi}(1+x)\cos(xy)\,dx \\ &= 2\left[(1+x)\frac{\sin(xy)}{y}\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\frac{\sin(xy)}{y}\,dx \\ &= 2\frac{(1+\pi)\sin(\pi y)}{y} + 2\left[\frac{\cos(xy)}{y^2}\right]_0^{\pi} = 2\,\frac{(y+\pi y)\sin(\pi y) + \cos(\pi y) - 1}{y^2} \end{aligned}$$

b)
komplexe Fourier-Koeffizienten:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + |x|\,dx = \frac{1}{2\pi}(2\pi + \pi^2) = 1 + \pi/2$$

für $k \neq 0$: $c_k = \hat{g}(k)/(2\pi) = \big((-1)^k - 1\big)\,/\,(\pi k^2)$
reelle Fourier-Koeffizienten: $f$ gerade $\rightsquigarrow b_k = 0$

$$a_k = c_k + c_{-k} = 2\,\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\,, \quad a_0 = 2c_0 = 2 + \pi$$

c)
Wert der Reihe: $\sum_k c_k$ entspricht Auswertung der Fourier-Reihe bei $0 \rightsquigarrow (1+|x|)_{|x=0} = 1$

**Aufgabe 9** Bestimmen Sie die Möbius-Transformation, die die Punkte 0, $1+\mathrm{i}$ und $2\mathrm{i}$ auf 0, 1 und $\infty$ abbildet. Geben Sie die Bilder von $z = \mathrm{i}$ und $z = \infty$ sowie eine geometrische Beschreibung der Bildmengen der Geraden

$$g_1 : t \mapsto \mathrm{i}t, \quad g_2 : t \mapsto \mathrm{i} + t$$

($t \in \mathbb{R}$) an.

---

Ansatz

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

$0 \mapsto 0 \implies b = 0$ und o.B.d.A. $a = 1$
$2\mathrm{i} \mapsto \infty \implies 2\mathrm{i}c + d = 0$, d.h. $d = -2\mathrm{i}c$
$1+\mathrm{i} \mapsto 1 \implies$

$$1 = \frac{1+\mathrm{i}}{c(1+\mathrm{i}-2\mathrm{i})} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{c\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}} = \frac{\mathrm{i}}{c}, \quad \text{d.h. } c = \mathrm{i}$$

also

$$w = \frac{z}{\mathrm{i}z+2}$$

Bild von $z = \mathrm{i}$: $\mathrm{i}/(\mathrm{i}^2+2) = \mathrm{i}$
Bild von $\infty$: $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$

Gerade $g_1$ verläuft durch 0, i und 2i, daher enthält das Bild die Punkte 0, i und $\infty$, ist also die imaginäre Achse.
Gerade $g_2$ verläuft durch i, $1+\mathrm{i}$ und $\infty$, daher enthält das Bild die Punkte i, 1 und $-\mathrm{i}$, ist also der Einheitskreis.