Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk)

Aufgabe 1: *(11 Punkte)*
Gegeben ist der Körper $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\ ; \quad x,y,z \geq 0\}$.

(a) Geben Sie K in Kugelkoordinaten an.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers K.

(c) Berechnen Sie den Schwerpunkt von K.

Lösungsvorschlag:

(a) Eine mögliche Parametrisierung des Hohlkugeloktanten lautet:

$$\kappa(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

(b) Das Volumen des Körpers berechnet sich über das Volumenintegral wie folgt:

$$\begin{aligned} V_K &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 r^2\sin(\vartheta)drd\varphi d\vartheta \\ &= \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

Alternativ: Es gilt für das Volumen eines Kugeloktanten mit dem Radius r:

$$\frac{V(r)}{8} = \frac{4/3\pi r^3}{8}.$$

Somit ist das gesuchte Volumen gegeben durch

$$\begin{aligned} V_K &= \frac{V(2)-V(1)}{8} \\ &= \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

(c) Für Koordinaten des Schwerpunkts berechnen wir einer der folgenden Integrale:

$$\begin{aligned} S_x = \frac{1}{V_K}\iiint\limits_K xdxdydz &= \frac{6}{7\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)r^2\sin(\vartheta)drd\varphi d\vartheta \\ &= \frac{45}{56} \end{aligned}$$

oder

$$S_z = \frac{6}{7\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 r^3\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)drd\varphi d\vartheta = \frac{45}{56}$$

Aus Symmetriegründen gilt $S_x = S_y = S_z$.

Alternativ Kartesische Koordinaten:

(a)

(b) Berechnung des Volumens mit kartesischen Koordinaten:Es gilt $V = V_2 - V_1$, wobei V_r das Volumen des Kugeloktantes mit dem Radius r bezeichnet. Für das entsprechende Integral schreiben wir:

$$V_r = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_0^{\sqrt{r^2-z^2-y^2}} dxdydz$$

$$= \int_0^r \left[\frac{1}{2}\left((r^2-z^2)\arcsin(\frac{y}{\sqrt{r^2-z^2}}) + y\sqrt{r^2-z^2-y^2}\right)\right]_{y=0}^{y=\sqrt{r^2-z^2}} dz$$

$$= \int_0^r \frac{\pi}{4}(r^2-z^2)dz = \frac{\pi r^3}{6}$$

$$V = \frac{7\pi}{6}$$

(c)

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = Ay,\ y(0) = v,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag:

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$(v|Av) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A ist

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 \quad .$$

2 ist die einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms, und sie ist zweifach. Deswegen bekommen wir

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} \quad .$$

Also ist die Wronski Matrix

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ (e^{2t})' & (te^{2t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

und wir bekommen

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Jetzt berechnen wir

$$M(0)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Deshalb ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$f = (v|Av)(M(0)^T)^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2t} - te^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} \quad .$$

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*
Sei $x = x(t),\ v = v(t)$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$x' = v,\ v' = -v^3 - x,$$

und sei $E = \frac{x^2+v^2}{2}$. Zeigen Sie, dass $\frac{dE}{dt} \leq 0$.
Lösungsvorschlag: Mit der Kettenregel bekommen wir

$$\frac{dE}{dt} = xx' + vv'$$

$$= xv + v(-v^3 - x)$$
$$= -v^4 \leq 0 \qquad .$$

Aufgabe 4: *(7 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) = \cosh(x).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- ***Lösung der homogenen Gleichung***
  Zuerst muss die Lösung f_h der homogenen Gleichung berechnet werden. Dazu bestimmt man das charakteristische Polynom aus der Gleichung $y'' - 4y' - 5y = 0$:

  $$p(X) = X^2 - 4X - 5 = (X-5)(X+1).$$

  Dieses hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$ und daher lautet die homogene Lösung:

  $$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- ***Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite($e^{\mu} x$)***
  Wir verwenden $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und setzen nach Superposition zwei partikuläre Lösungen an. Zunächst $f_{p_1}(x) = ae^x$

  $$f'_{p_1}(x) = ae^x \quad \text{und} \quad f''_{p_1}(x) = ae^x.$$

  Einsetzen in die Gleichung liefert nun

  $$\begin{aligned} f''_{p_1} - 4f'_{p_1} - 5f_{p_1} =& ae^x - 4ae^x - 5ae^x \\ =& -8ae^x \\ =& \frac{e^x}{2}. \end{aligned}$$

  Ein Koeffizientenvergleich liefert

  $$a = -\frac{1}{16}$$

  Als zweiten Ansatz wählen wir wegen der Resonanz $f_{p_2}(x) = bxe^{-x}$.

  $$f'_{p_2}(x) = b(e^{-x} - xe^{-x}) \quad \text{und} \quad f''_{p_2}(x) = b(-2e^{-x} + xe^{-x}).$$

  Einsetzen in die Gleichung liefert nun

  $$\begin{aligned} f''_{p_2} - 4f'_{p_2} - 5f_{p_2} =& b(-2e^{-x} + xe^{-x}) - 4(b(e^{-x} - xe^{-x})) - 5(bxe^{-x}) \\ =& -6be^{-x} \\ =& \frac{e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

  Ein Koeffizientenvergleich liefert

  $$b = -\frac{1}{12}.$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$f_p = f_{p_1} + f_{p_2} = -\frac{1}{16}e^x - \frac{1}{12}xe^{-x}.$$

- ***Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite(*** $\cosh(x)$ ***)***
  Wir verwenden direkt den cosh und müssen wegen der Resonanz $f_p = a\cosh(x) + b\sinh(x) + cx\cosh(x) + dx\sinh(x)$ ansetzen. Dies führt auf

$$f_p'(x) = (a+d)\sinh(x) + (b+c)\cosh(x) + cx\sinh(x) + dx\cosh(x)$$

und

$$f_p''(x) = (b+2c)\sinh(x) + (a+2d)\cosh(x) + dx\sinh(x) + cx\cosh(x).$$

Einsetzen in die Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned} f_p'' - 4f_p' - 5f_p =& (b+2c)\sinh(x) + (a+2d)\cosh(x) + dx\sinh(x) + cx\cosh(x) \\ & - 4((a+d)\sinh(x) + (b+c)\cosh(x) + cx\sinh(x) + dx\cosh(x)) \\ & - 5(a\cosh(x) + b\sinh(x) + cx\cosh(x) + dx\sinh(x)) \\ =& (a+2d-4b-4c-5a)\cosh(x) + (b+2c-4a-4d-5b)\sinh(x) \\ & + (c-4d-5c)x\cosh(x) + (d-4c-5d)x\sinh(x) \\ =& (-4b-4c-4a+2d)\cosh(x) + (-4a-4d-4b+2c)\sinh(x) \\ & + (-4d-4c)x\cosh(x) + (-4c-4d)x\sinh(x) \\ =& \cosh(x). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & 2 \\ -4 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt sofort $d = -c$ und durch Subtraktion der ersten von der zweiten Zeile

$6c - 6d = -1$ und damit

$$c = -d = -\frac{1}{12}.$$

Die letzte verbleibende Gleichung reduziert sich durch Einsetzen auf $-4a - 4b = \frac{1}{2}$ und damit

$$b = -\frac{1}{8} - a.$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$f_p = (a(\cosh(x) - \sinh(x))) - \frac{1}{8}\sinh(x) - \frac{1}{12}x\cosh(x) + \frac{1}{12}x\sinh(x).$$

bzw, da a und b vertauschbar sind,

$$f_p = (b(\sinh(x) - \cosh(x))) - \frac{1}{8}\cosh(x) - \frac{1}{12}x\cosh(x) + \frac{1}{12}x\sinh(x).$$

Da $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$ gilt, kann man die Konstante a (bzw.b) in der Konstante c_1 der homogenen Lösung verschwinden lassen.

- ***Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten***
  Alternativ kann man die partikuläre Lösung auch durch Variation der Konstanten bestimmen. Dazu muss man die Wronskimatrix $M(x)$ für $f_1(x)$, $f_2(x)$ aufstellen und ihre Inverse $M(x)^{-1}$ berechnen

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 5e^{5x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5e^{x} & -e^{x} \\ e^{-5x} & e^{-5x} \end{pmatrix}.$$

Damit kann man ein Gleichungssystem für die Ableitungen der noch zu bestimmenden Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ aufstellen

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5e^{x} & -e^{x} \\ e^{-5x} & e^{-5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cosh(x) \end{pmatrix}$$

und erhält nach Ausführen der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12}(e^{2x}+1) \\ \frac{1}{12}(e^{-4x}+e^{-6x}) \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass

$$-\frac{1}{12}\int e^{2x}+1dx = -\frac{1}{24}e^{2x} - \frac{1}{12}x, \quad \frac{1}{12}\int e^{-4x}+e^{-6x}dx = -\frac{1}{48}e^{-4x} - \frac{1}{72}e^{-6x}.$$

Damit lauten die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ letztendlich

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\frac{1}{24}e^{2x} - \frac{1}{12}x \\ c_2(x) &= -\frac{1}{48}e^{-4x} - \frac{1}{72}e^{-6x}, \end{aligned}$$

und man bekommt die partikuläre Lösung durch Einsetzen dieser Funktionen

$$\begin{aligned} f_p(x) &= c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) \\ &= -\frac{1}{24}e^{2x}e^{-x} - \frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{1}{48}e^{-4x}e^{5x} - \frac{1}{72}e^{-6x}e^{5x} \\ &= -\frac{1}{16}e^{x} - \frac{1}{12}xe^{-x}(-\frac{1}{72}e^{-x}). \end{aligned}$$

Zusammenfassend lautet die allgemeine Lösung als Linearkombination des homogenen und partikulären Anteils somit

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = -\frac{1}{16}e^x + (c_1 - \frac{1}{12}x)e^{-x} + c_2 e^{5x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

bzw, wenn mit dem $\cosh(x)$ gerechnet wurde

$$f(x) = -\frac{1}{8}\sinh(x) + \frac{1}{12}x(\sinh(x) - \cosh(x)) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

oder

$$f(x) = -\frac{1}{8}\cosh(x) + \frac{1}{12}x(\sinh(x) - \cosh(x)) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) + x^2 y(x) = x^2$$
$$y(0) = 5.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

- ***Lösung der homogenen Gleichung***
  Zuerst muss die Lösung f_h der homogenen Gleichung berechnet werden. Dies erreichen wir, indem wir den Ansatz der getrennten Variablen wählen.

  $$\frac{f_h'(x)}{f_h(x)} = -x^2.$$

  Durch Integration erhalten wir

  $$\ln(f_h(x)) = -\frac{x^3}{3} + \tilde{c}$$

  und daraus

  $$f_h(x) = ce^{-\frac{x^3}{3}}.$$

- ***Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite (Glück oder genaues Hinschauen)***
  Wir wählen als Ansatz $f_p(x) = ax^2 + bx + c$ und damit $f_p' = 2ax + b$. Dann ist

  $$x^2 = f_p'(x) + x^2 f_p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2ax + b$$

  und es folgt direkt, dass $f_p(x) = 1$ eine partikuläre Lösung ist.

- ***Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten***
  Wir variieren die Konstante c der homogenen Lösung und wählen als Ansatz $f_p(x) = c(x)e^{-\frac{x^3}{3}}$. Dies führt auf die Gleichung

  $$c'(x) = x^2 e^{\frac{x^3}{3}}.$$

  Wenn wir dies nun integrieren, benötigen wir die Substitution $z = x^3$ mit $\frac{dz}{dx} = 3x^2$ und erhalten

  $$\begin{aligned} c(x) = \int c'(x)dx &= \int x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx \\ &= \int \frac{1}{3} e^{\frac{z}{3}} dz \\ &= e^{\frac{z}{3}} \\ &= e^{\frac{x^3}{3}}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, die partikuläre Lösung lautet $f_p(x) = e^{\frac{x^3}{3}} e^{-\frac{x^3}{3}} = 1$.

- ***Allgemeine Lösung aus homogener und inhomogener Lösung***
  Die allgemeine Lösung lautet

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1.$$

- ***Lösung der allgemeinen Gleichung nach getrennten Veränderlichen***
  Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir

$$\frac{f'(x)}{f(x)-1} = x^2$$

Durch Integration erhalten wir

$$\ln(f(x)-1) = -\frac{x^3}{3} + \tilde{c}$$

und daraus

$$f(x) = ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$$

- ***Lösung des Anfangswertproblems aus der allgemeinen Lösung***

Es gilt also $f(0) = c + 1 = 5$ und damit $c = 4$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$f(x) = 4e^{-\frac{x^3}{3}} + 1.$$

Aufgabe 6: *(9 Punkte)*
Die $\frac{\pi}{2}$-periodische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x) := -x; \qquad x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}); \qquad g(x) = g(x + \frac{\pi}{2}).$$

(a) Entwickeln Sie g in eine reelle Fourier-Reihe.

(b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

(c) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(x) = \sin(8x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) (1) Weil $g(x) = -x$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(2) Die Koeffizienten b_n für g folgen durch einfache Integration sofort:

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -x \sin(4nx) dx = \frac{4}{\pi} \left[\frac{x \cos(4nx)}{4n} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(4nx) dx$$

$$= \left[\frac{x \cos(4nx)}{n\pi} - \frac{\sin(4nx)}{4n^2\pi} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{(-1)^n}{2n}.$$

(3) Die Fourierreihe von g ist

$$g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} \sin(4kx).$$

(b) Die Funktion g ist stetig differenzierbar in den Intervallen $\left(\frac{(2k-1)\pi}{4}, \frac{(2k+1)\pi}{4}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für g als auch g' in allen Punkten $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Da die Funktion g insbesondere stetig ist in $\left(\frac{(2k-1)\pi}{4}, \frac{(2k+1)\pi}{4}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $g(x)$. In den Punkten $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ hingegen macht g einen Sprung der Höhe $\frac{\pi}{2}$, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \to \frac{(2k+1)\pi}{4} - 0} g(x) + \lim_{x \to \frac{(2k+1)\pi}{4} + 0} g(x) \right) = \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = 0.$$

(c) Mit den bekannten Orthogonalitätsrelationen für $\sin(8x)$ sieht man sofort, dass

$$\sin(8x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(4kx) + b_k \sin(4kx)$$

mit

$$a_k = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0, \qquad b_k = (\delta_{2,k} =) \begin{cases} 1, k = 2 \\ 0, k \neq 2 \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$