Nachname:	Vorname:	Matrikelnummer:

Bitte beachten Sie: Abhängig von Ihrem Studiengang, und je nachdem, welche Prüfungsordnung für Sie gilt, bearbeiten Sie eventuell nur einen Teil der Aufgaben.
Bitte auswählen und ankreuzen:

- ◻ *Ich studiere **t.o. BWL nach der neuen Prüfungsordnung von 2012** oder **Berufspädagogik mit Nebenfach Bauingenieurwesen** und möchte **6 Leistungspunkte** erwerben.* Bearbeiten Sie bitte die **Aufgaben 1 bis 8**. Ihre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

- ◻ *Ich studiere **t.o. BWL nach der Prüfungsordnung von 2008** oder **Wirtschaftsinformatik** und möchte **9 Leistungspunkte** erwerben.* Bearbeiten Sie bitte **alle 11 Aufgaben**. Ihre Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

- ◻ *Ich möchte eine Schlüsselqualifikation (**SQ**) erwerben.* Bearbeiten Sie bitte nur die **Aufgaben 1 bis 4**. Ihre Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

- ◻ *Keines der oben genannten trifft zu.* Bitte wenden Sie sich an die Aufsicht.*

Unterschrift: ____

Bitte vergewissern Sie sich, dass Sie die richtigen Aufgaben bearbeiten. Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Als Hilfsmittel sind zwei beliebig beschriftete DIN A4-Blätter und ein Taschenrechner zugelassen. Lösungen ohne Angabe eines nachvollziehbaren Lösungsweges können nicht gewertet werden. – Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Summe
Punkte												

Korrekturvermerke: Korrektor/in:

*) Hinweis: Früherer Teil I entspricht Aufgaben 2, 3, 4, 5, 6, 8;
früherer Teil II entspricht Aufgaben 1, 7, 9, 10, 11.

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen) (4 Punkte)

a) Berechnen Sie das Produkt der beiden komplexen Zahlen $1+2i$ und $3+4i$. Stellen Sie das Ergebnis in der Form $a+bi$, mit reellen Zahlen a und b, dar.
b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, die die Gleichung
$$z^2+2z+10=0$$
erfüllen.

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem) (10 Punkte)
Sei die reelle 3×4–Matrix
$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$
gegeben. Sei außerdem der Vektor
$$b=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
gegeben.

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems
$$Ax=b.$$
b) Bestimmen außerdem Sie die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems
$$Ax=0.$$

Aufgabe 3 (Matrizenrechnung) (6 Punkte)
Seien die reellen Matrizen
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
gegeben. Berechnen Sie AB und A^{-1}.

Aufgabe 4 (Kapitalentwicklung) (8 Punkte)
Auf ein Konto mit einem anfänglichen Guthaben von 3000 € werden am Ende jedes Jahres 250 € eingezahlt. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit 5% verzinst.

a) Wie hoch ist das Guthaben nach 40 Jahren?
b) Nach wie vielen Jahren übersteigt das Guthaben erstmals den Betrag von 40.000 €?

Aufgabe 5 (Grenzwerte) (10 Punkte)

a) Welche der nachstehenden Folgen sind konvergent, welche divergent?

$$a_n := \frac{24n^2}{n^3 + 9n + 3}, \qquad b_n := \frac{3n^4 + 7n^2}{7n^4 + 3n^2}, \qquad c_n := \cos(\pi \cdot n).$$

Begründen Sie Ihre Antworten kurz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}.$$

Aufgabe 6 (Summen und Reihen) (8 Punkte)

a) Berechnen Sie den Wert der Summe bzw. Reihe:

$$\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 8^{1-n}.$$

b) Entscheiden Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergieren oder divergieren und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)^n}{n!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n(n+1)}.$$

Aufgabe 7 (Determinante und Definitheit) (6 Punkte)

Gegeben sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von A.

b) Beweisen Sie, dass A positiv definit ist.

Aufgabe 8 (Lokale Extrema) (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x + y^2 + yx + y$ auf $\mathbb{R}^2$.

a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Hessematrix $\mathrm{Hess} f(x, y)$.

b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion.

Die folgenden Aufgaben bearbeiten Sie bitte nur, falls Sie 9 Leistungspunkte erwerben möchten.

Aufgabe 9 (Lokale Extrema unter Nebenbedingungen) (14 Punkte)
Sei für reelle x, y, z die Funktion

$$f(x, y, z) := 5\,x^2 - 4\,xy + 5\,y^2 - 4\,yz + z^2$$

definiert und sei außerdem die Funktion

$$g(x, y, z) := 4\,x^2y - 2\,x^2z - 2\,xy^2 + xyz - 1$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $p = (1, 1, 1)$ ein Flachpunkt von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist und geben Sie den Lagrange-Multiplikator an.
b) Entscheiden Sie, ob es sich bei dem Punkt p um eine lokale Maximal- bzw. Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ handelt und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10 (Taylorpolynom, mehrdimensional) (8 Punkte)
Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der für positive x und y definierten Funktion

$$f(x, y) = x^y = e^{y \ln(x)}$$

am Entwicklungspunkt $(x, y) = (1, 1)$.

Aufgabe 11 (Differentialgleichung) (8 Punkte)
Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = \sin(x) \cdot y, \qquad y(0) = 1.$$