Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler im WS 2013/2014
Lösungsvorschläge zur Klausur im WS 2013/2014

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen) (4 Punkte)

a) Berechnen Sie das Produkt der beiden komplexen Zahlen $1 + 2i$ und $3 + 4i$. Stellen Sie das Ergebnis in der Form $a + bi$, mit reellen Zahlen a und b, dar.
b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, die die Gleichung

$$z^2 + 2z + 10 = 0$$

erfüllen.

Lösung zu Aufgabe 1

a) $(1 + 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i + 6i + 8i^2 = 3 + 10i - 8 = -5 + 10i$.
b) Mit der "Mitternachtsformel":

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i.$$

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem) (10 Punkte)
Sei die reelle 3×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei außerdem der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = b.$$

b) Bestimmen außerdem Sie die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 2 Das Anwenden des Gaußalgorithmus auf die erweiterte Matrix liefert:

a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 5 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 15 \\ 0 & -9 & 3 & 0 & 33 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 7{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10{,}5 \end{array}\right)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Lösungsmenge leer ist.

b) Zur Bestimmung der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ kann man die auf Zeilenstufenform gebrachte Matrix aus Teilaufgabe 1 verwenden. Man erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ - 3x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wir wählen als Pivotvariablen $x_3 = s$, $x_4 = t$ und erhalten durch Rückwärtseinsetzen

$$\begin{aligned} -3x_2 + s = 0 &\iff x_2 = \tfrac{1}{3}s, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 &\iff x_1 = -2x_2 + s - t = \tfrac{1}{3}s - t, \end{aligned}$$

und somit als Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}s - t \\ \frac{1}{3}s \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3 (Matrizenrechnung) (6 Punkte)

Seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie AB und A^{-1}.

Lösung zu Aufgabe 3 Es gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Das übliche Verfahren zum Invertieren von Matrizen mittels Zeilenumformung liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Die Inverse von A ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Kapitalentwicklung) (8 Punkte)

Auf ein Konto mit einem anfänglichen Guthaben von 3000 € werden am Ende jedes Jahres 250 € eingezahlt. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit 5% verzinst.

a) Wie hoch ist das Guthaben nach 40 Jahren?
b) Nach wie vielen Jahren übersteigt das Guthaben erstmals den Betrag von 40.000 €?

Lösung zu Aufgabe 4 Bezeichnet R die jährliche Einzahlung bei einem Zinsfaktor von q, dann ergibt sich das Guthaben K_n nach n Jahren aus der Formel für die Kapitalentwicklung bei nachschüssiger Zahlweise

$$K_n = q^n \cdot K_0 + \frac{1-q^n}{1-q} \cdot R,$$

wobei K_0 das Startkapital bezeichnet.

a) Es ist $q = 1{,}05, R = 250, n = 40$. Einsetzen liefert

$$K_{40} = 1{,}05^{40} \cdot 3000 + \frac{1-1{,}05^{40}}{1-1{,}05} \cdot 250 \approx 51319{,}91.$$

Das Guthaben nach 40 Jahren beträgt 51319,91 €.

b) Es ist folgende Ungleichung in n zu lösen

$$40000 < 1{,}05^n \cdot 3000 + \frac{1-1{,}05^n}{1-1{,}05} \cdot 250.$$

Wir erhalten

$$1{,}05^n \cdot \left(3000 - \frac{1}{1-1{,}05} \cdot 250\right) > 40000 - \frac{1}{1-1{,}05} \cdot 250$$
$$\iff 1{,}05^n > \frac{45000}{8000},$$

bzw. nach Anwendung des Logarithmus (Taschenrechner) auf beiden Seiten

$$n > \frac{\ln(\frac{45}{8})}{\ln(1{,}05)} \approx 35{,}4.$$

Das Guthaben übersteigt also erstmals nach 36 Jahren einen Wert von 40.000 €.
Alternativ: Man kann natürlich auch die fertig umgestellte Formel

$$n = \log_q \left(\frac{K_n + \frac{r}{q-1}}{K_0 + \frac{r}{q-1}} \right)$$

für die Laufzeit verwenden, wenn man sie kennt. Hier ist die Rate $r = 250$, der Zinsfaktor $q = 1{,}05$, das anfängliche Kapital $K_0 = 3000$, das Endkapital $K_n = 40000$. Es gilt

$$\frac{r}{q-1} = \frac{250}{0{,}05} = 5000.$$

Damit ergibt sich wieder, wie oben

$$n = \log_q \left(\frac{45000}{8000} \right).$$

Aufgabe 5 (Grenzwerte) (10 Punkte)

a) Welche der nachstehenden Folgen sind konvergent, welche divergent?

$$a_n := \frac{24n^2}{n^3 + 9n + 3}, \qquad b_n := \frac{3n^4 + 7n^2}{7n^4 + 3n^2}, \qquad c_n := \cos(\pi \cdot n).$$

Begründen Sie Ihre Antworten kurz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}.$$

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Folgen a_n und b_n kann man behandeln, indem man jeweils im Zähler und im Nenner die höchste im Nenner vorkommende Potenz von n ausklammert. Damit sieht man, dass a_n eine Nullfolge ist und dass b_n gegen $\frac{3}{7}$ konvergiert. Die Folge c_n nimmt für gerade n den Wert $+1$ und für ungerade n den Wert -1 an, sie ist somit divergent.

b) Mit der Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{1} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\cdot 2}{1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Aufgabe 6 (Summen und Reihen) (8 Punkte)

a) Berechnen Sie den Wert der Summe bzw. Reihe:

$$\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 8^{1-n}.$$

b) Entscheiden Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergieren oder divergieren und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(x)^n}{n!} \quad \text{für } x\in\mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n(n+1)}.$$

Lösung zu Aufgabe 6

a) Beim ersten Term handelt es sich eine endliche geometrische Summe, die Summenformel liefert:

$$\sum_{n=0}^{9}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{1024}\right) = \frac{1023}{512} \approx 1{,}998.$$

Bei dem zweiten Term handelt es sich um die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q=\frac{1}{8}$, die Summenformel liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}.$$

b) Die erste Reihe ist genau die Exponentialreihe $\exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$, mit $\sin(x)$ für t eingesetzt, die Reihe ist somit konvergent (gegen $e^{\sin(x)}$, was aber nicht angegeben werden muss). Die zweite Reihe divergiert, da ihre Glieder keine Nullfolge bilden.

Aufgabe 7 (Determinante und Definitheit) (6 Punkte)
Gegeben sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von A.
b) Beweisen Sie, dass A positiv definit ist.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Die Determinante berechnet sich (z.B. mit der Jägerzaunregel) zu

$$\begin{aligned} &3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 2 = \\ &= 27 + 4 + 4 - 3 - 12 - 12 = 8 \end{aligned}$$

Alternativ: Durch Zeilenumformungen:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8. \end{aligned}$$

b) Es genügt, festzustellen, dass neben der Determinante auch die beiden anderen Hauptminoren der Matrix positiv sind. In der Tat gilt $3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5 > 0$ und $3 > 0$.

Aufgabe 8 (Lokale Extrema) (8 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x + y^2 + yx + y$ auf $\mathbb{R}^2$.

a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Hessematrix $\mathrm{Hess} f(x, y)$.
b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Der Gradient von f berechnet sich zu

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + x + 1 \\ 2y + x + 1 \end{pmatrix}.$$

Die Hessematrix von f ist

$$\mathrm{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Zunächst bestimmen wir die lokalen Flachstellen von f, indem wir den Gradienten gleich Null setzen, dies führt auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y + x + 1 &= 0, \\ 2y + x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Abziehen der oberen von der unteren Gleichung ergibt $y = 0$, woraus $x = -1$ folgt. Die einzige Lösung des Gleichungssystems und somit der einzige Flachpunkt von f ist also $(x, y) = (-1, 0)$. Die (konstante) Hessematrix ist positiv definit, da beide Hauptminoren gleich 1 sind. Also liegt in $(-1, 0)$ ein lokales Minimum der Funktion f vor und dies ist das einzige lokale Extremum der Funktion.

Aufgabe 9 (Lokale Extrema unter Nebenbedingungen) (14 Punkte)

Sei für reelle x, y, z die Funktion

$$f(x, y, z) := 5\,x^2 - 4\,xy + 5\,y^2 - 4\,yz + z^2$$

definiert und sei außerdem die Funktion

$$g(x, y, z) := 4\,x^2y - 2\,x^2z - 2\,xy^2 + xyz - 1$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $p = (1, 1, 1)$ ein Flachpunkt von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist und geben Sie den Lagrange-Multiplikator an.

b) Entscheiden Sie, ob es sich bei dem Punkt p um eine lokale Maximal- bzw. Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ handelt und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Für den Punkt p gilt $g(p) = g(1, 1, 1) = 0$, d.h. die Nebenbedingung ist erfüllt. Wir berechnen zunächst die Gradienten von f und g allgemein in Abhängigkeit von x, y, z:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 10\,x - 4\,y \\ -4\,x + 10\,y - 4\,z \\ -4\,y + 2\,z \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8\,xy - 4\,xz - 2\,y^2 + yz \\ -4\,xy + xz + 4\,x^2 \\ -2\,x^2 + xy \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\nabla f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \nabla g(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\nabla f(1, 1, 1) = \lambda \nabla g(1, 1, 1)$ mit $\lambda = 2$, d.h. die Lagrange-Multiplikator-Bedingung ist erfüllt bei $p = (1, 1, 1)$ mit dem Lagrange-Multiplikator $\lambda = 2$. Dies zeigt, dass es sich bei dem Punkt p um einen Flachpunkt von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ handelt.

b) Wir lösen zunächst das Gleichungssystem $\nabla g(1, 1, 1)^t u = 0$, ausgeschrieben:

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Wir definieren eine Matrix U, deren Spalten eine Basis des Lösungsraums bilden:

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Außerdem definieren wir die Hilfsfunktion

$$F(x,y,z) := f(x,y,z) - 2g(x,y,z) = \\ = 5\,x^2 - 4\,xy + 5\,y^2 - 4\,yz + z^2 - 8\,x^2y + 4\,x^2z + 4\,xy^2 - 2\,xyz + 2.$$

Daraus berechnen wir

$$\mathrm{Hess}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 10 - 16\,y + 8\,z & -4 - 16\,x + 8\,y - 2\,z & 8\,x - 2\,y \\ -4 - 16\,x + 8\,y - 2\,z & 10 + 8\,x & -4 - 2\,x \\ 8\,x - 2\,y & -4 - 2\,x & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{Hess}F(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -14 & 6 \\ -14 & 18 & -6 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir $U^t \mathrm{Hess}F(1,1,1)U =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -14 & 6 \\ -14 & 18 & -6 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 248 & -116 \\ -116 & 56 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist positiv definit, denn es gilt $248 > 0$ und $248 \cdot 56 - 116^2 = 432 > 0$. Der Punkt p ist also eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 10 (Taylorpolynom, mehrdimensional) (8 Punkte)
Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der für positive x und y definierten Funktion

$$f(x,y) = x^y = e^{y\ln(x)}$$

am Entwicklungspunkt $(x,y) = (1,1)$.

Lösung zu Aufgabe 10 Um die Formel aufzustellen, berechnen wir den Funktionswert, sowie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung am Punkt $(1,1)$, wobei wir zur Abkürzung die partielle Ableitung nach x bzw. y durch den Index x bzw. y bezeichnen.

$$f(x,y) = e^{y\ln(x)} \Rightarrow f(1,1) = 1,$$
$$f_x(x,y) = e^{y\ln(x)}\frac{y}{x} \Rightarrow f_x(1,1) = 1,$$
$$f_y(x,y) = e^{y\ln(x)}\ln(x) \Rightarrow f_y(1,1) = 0,$$
$$f_{xx}(x,y) = e^{y\ln(x)}\frac{y^2}{x^2} - e^{y\ln(x)}\frac{y}{x^2} \Rightarrow f_{xx}(1,1) = 0,$$
$$f_{xy}(x,y) = e^{y\ln(x)}\ln(x)\frac{y}{x} + e^{y\ln(x)}\frac{1}{x} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 1,$$
$$f_{yy}(x,y) = e^{y\ln(x)}\ln(x)^2 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 0.$$

Also gilt

$$f(1,1) = 1, \quad \mathrm{grad}f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{Hess}f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Taylorpolynom ergibt sich zu

$$f(1,1) + (x-1, y-1)\mathrm{grad} f(1,1) + \frac{1}{2}(x-1, y-1)\mathrm{Hess} f(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} =$$
$$= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) = 1 + x - 1 + xy - x - y + 1 = 1 - y + xy.$$

Aufgabe 11 (Differentialgleichung) (8 Punkte)

Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = \sin(x) \cdot y, \qquad y(0) = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 11 Setze $f(x) := \sin(x)$ und $g(y) := y$. Damit erhalten wir

$$F(x) := \int_0^x \sin(t)\, dt = [-\cos(t)]_0^x = -\cos(x) + 1$$

und

$$H(y) := \int_1^y t^{-1}\, dt = [\ln(t)]_1^y = \ln(y) - \ln(0) = \ln(y).$$

Die gesuchte Lösung erhält man, wenn man

$$H(y(x)) = \ln(y) = -\cos(x) + 1 = F(x)$$

nach $y(x)$ auflöst:

$$y(x) = e^{1-\cos(x)}.$$