Klausur zur Höheren Mathematik III (vertieft)

für **Luft- und Raumfahrttechnik, Materialwissenschaften**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle** Aufgaben.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zehn Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1–3 und 5(a)** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 4, 5(b), 5(c), 6 und 7** werden nur die Antworten bzw. Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 02.04.2014 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 08.04.2014 zwischen 13:00 und 15:00 Uhr in Raum V 57.8.122 statt.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen bei der Klausureinsicht oder vom **09.04.2014** bis **11.04.2014** jeweils zwischen 11:00 bis 12:00 Uhr mit Iris Köster (Raum 7.351) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Tabelle der Standardnormalverteilung $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\Phi(x)$	0.5000	0.5398	0.5793	0.6179	0.6554	0.6915	0.7257	0.7580	0.7881	0.8159
x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\Phi(x)$	0.8413	0.8643	0.8849	0.9032	0.9192	0.9332	0.9452	0.9554	0.9641	0.9713

Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Ein Student legt den Weg zur Uni mit den nichtaufeinander abgestimmten Verkehrsmitteln Bus und Bahn zurück. Zu 90% wird der Anschluss erreicht, ansonsten muss er auf den nächsten Zug warten. Der Student hat 100 Fahrten pro Jahr.

Es bezeichne X die Anzahl der verpassten Fahrten in einem Jahr.

(a) Geben Sie den Namen der Verteilung, den Erwartungswert $\mu(X)$ und die Varianz $\sigma^2(X)$ der verpassten Fahrten an.

(b) Es soll die Wahrscheinlichkeit geschätzt werden, mit der der Student bei 100 Fahrten zwischen 6 und 14 Fahrten verpasst. Verwenden Sie für die Schätzung der Wahrscheinlichkeit

- die Ungleichung von Tschebyscheff bzw.
- den Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace.

(c) Bezeichne A das Ereignis, dass in 3 aufeinander folgenden Fahrten mindestens zweimal der Anschluss erreicht wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(A)$.

Aufgabe 2 (*12 Punkte*) Gegeben sei die massive Halbkugel $\left\{(x,y,z)^T \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4,\ z \geqq 0\right\}$, aus der der Schnitt mit einem Kreiszylinder vom Radius 1, dessen Drehachse die z-Achse ist, herausgebohrt wurde. Der so entstehende Körper heiße M.

Ferner sei folgendes Vektorfeld gegeben

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3xy^2 + \mathrm{e}^y \\ y^3 + \sin z \\ \frac{1}{2}z^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie den Schnitt von M mit der Ebene $y = 0$. Bestimmen Sie eine Parametrisierung von M.

(b) Berechnen Sie das Volumen von M.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S von M. Hierbei habe M die konstante Dichte $\rho = 1$.

(d) Bestimmen Sie den Fluss von g durch die gesamte Oberfläche von M (von Innen nach Außen).

Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = -\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Hinweis: e^x und $x\mathrm{e}^x$ sind Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} - 2u_{tt} - 4u_x = 0.$$

(a) Gesucht sind nicht-triviale Lösungen der Gestalt $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$.

Bestimmen Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung, die v erfüllt:

Bestimmen Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung, die w erfüllt:

(b) Sei nun $w(t) = \sin(\sqrt{2}t)$. Bestimmen Sie zu diesem w eine gewöhnliche Differentialgleichung, die v erfüllt:

Bestimmen Sie alle Lösungen der partiellen DGL der Form $u(x,t) = v(x) \cdot \sin(\sqrt{2}t)$:

$u(x,t) =$

Aufgabe 5 (*11 Punkte*) Die **4-periodische** Fortsetzung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & -2 \leqq x < 0 \\ -1 & 0 \leqq x < 2 \end{cases}$$

soll in eine Fourier-Reihe $F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)$ entwickelt werden.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0 und a_n für $n \geqq 1$ auf einem **separaten Blatt**.

Hinweis: Folgendes Integral kann für die Berechnung hilfreich sein:

$$\int x^2 \cos(\omega_n x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega_n^3}((x^2\omega_n^2 - 2)\sin(\omega_n x) + 2x\omega_n \cos(\omega_n x)).$$

(b) An welchen Stellen $x \in [-2, 2)$ konvergiert die Fourierreihe F gegen f?

Welchen Wert besitzt F an Sprungstellen von f?

(c) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, indem Sie f an einer geeigneten Stelle x_0 auswerten.

$x_0 =$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} =$

Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$, indem Sie F an einer geeigneten Stelle x_0 bestimmen.

$x_0 =$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} =$

Aufgabe 6 (*11 Punkte*) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $Y'(X) = A \cdot Y(X) + B(X)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

Ferner seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Welche der Vektoren v_1, v_2, v_3 sind Eigenvektoren von A?

(b) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 Hauptvektoren von A sind.

(c) Bestimmen Sie die Inverse T^{-1} der Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}$$

(d) Bringen Sie die Differentialgleichung durch Koordinatentransformation in die Form

$$Z' = J \cdot Z + \tilde{B}(Z),$$

wobei J die Jordan-Normalform von A ist.

$$Z' = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix} \cdot Z + \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}$$

(e) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der transformierten Gleichung aus dem Aufgabenteil **(d)**.

$Z_{inh} =$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) In Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ sei das Vektorfeld

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\cos(ny) \\ 2x^2\sin(ny) \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Für welches n besitzt g ein Potential? $n =$ ☐

Begründung:

☐

(b) Für die Differentialgleichung

$$-x\cos(2y) + 2x^2\sin(2y)y' = 0 \qquad (x > 0)$$

bestimme man einen nur von x abhängenden integrierenden Faktor μ und die zu seiner Berechnung notwendige Differentialgleichung.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \boxed{} \qquad \mu = \boxed{}$$

(c) Es seien

$$\tilde{P}(x,y) = \mu(x)\cdot(-x\cos(2y)) \quad \text{und} \quad \tilde{Q}(x,y) = \mu(x)\cdot(2x^2\sin(2y)).$$

Bestimmen Sie ein Potential F für das Vektorfeld $(\tilde{P}(x,y), \tilde{Q}(x,y))$.

$$F(x,y) = \boxed{}$$

(d) Geben Sie eine Gleichung für die Lösung der Differentialgleichung aus **(b)** an, welche durch den Punkt $(1, \frac{\pi}{8})$ verläuft. ☐

(e) Welche Steigung hat die Tangente einer Lösung der DGL aus **(b)** im Punkt $(1, \frac{\pi}{8})$? ☐