Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 − 9** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 10 − 14** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	$x\ln x - x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$	e^x
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	$\ln x$	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	e^x
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 13.10.2014 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **13.10.2014** bis **17.10.2014** mit Elke Gangl (Raum 7.521) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \mapsto s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei E_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und sei E_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Sei

$$B\colon \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$ und sei

$$C\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrizen ${}_{E_2}f_{E_3}$, ${}_{E_2}f_C$, und ${}_{B}f_C$.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3x + \sqrt[4]{1+x^4}}{x + \sqrt{1+x^2}}$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Zeigen Sie, dass die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4 + x^2 y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben ist, nicht stetig ist.

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 1 + 6xy - x^3 - 8y^3$$

(a) alle kritischen Stellen,

(b) Lage, Art und Wert der lokalen Extrema.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben ist die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2 - 2\mathrm{i}z - 1}{9}\right)^n.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius. Skizzieren Sie den Konvergenzkreis.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe für $z = 2\mathrm{i}$.

(c) Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe konvergiert und für welche $z \in \mathbb{C}$ sie divergiert.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben ist die skalare Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_2\,(\cos(x_1))^2 - \exp(x_2)$$

und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, \pi]\,.$$

Skizzieren Sie K. Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto (\operatorname{grad} f)(x)$ das Gradientenfeld von f. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x^2 - 4x + 4)(y^2 + 2y + 1) + xy - 2y + 3.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, (x,y), (0,-1))$.

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Ebenen im Raum $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 10x_2 - x_3 = -28\}, \\ E_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_2 - 2x_3 = 8\}, \\ E_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -12\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 10 (5 *Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ v+1 \end{pmatrix}, \quad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ y+z \end{pmatrix}, \quad h := f \circ g$$

und der Punkt $p := (0,1,1)$. Bestimmen Sie:

die Jacobimatrix $\mathrm{J}f\,(u,v) =$ ☐ , $\mathrm{J}g\,(x,y,z) =$ ☐ ,

den Vektor $g(p) =$ ☐ , $\mathrm{J}h\,(p) =$ ☐ .

Aufgabe 11 (5 *Punkte*) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sei eine Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A_α.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A_α.

(c) Für welche Werte von α ist A_α diagonalisierbar?

(d) Geben Sie für diese Werte eine invertierbare Matrix T_α so an, dass $T_\alpha^{-1} A_\alpha T_\alpha$ eine Diagonalmatrix ist.

$T_\alpha =$

Aufgabe 12 (2 *Punkte*) Seien $v_1 = (5,3,2)^\intercal$ und $v_2 = (2,4,6)^\intercal$. Berechnen Sie:

$\langle v_1 | v_2 \rangle =$ ☐ und $\langle 3v_2 | v_1 \rangle + \langle 7v_1 | v_1 \times v_2 \rangle =$ ☐

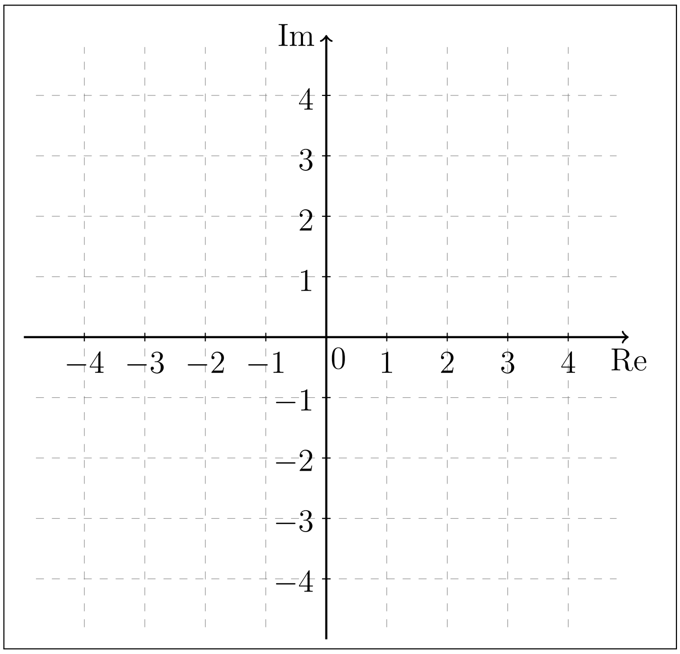
Aufgabe 13 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Integrale.

$$\int \frac{3}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x = \qquad\qquad \int_4^{+\infty} \frac{3}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{4x^3}{1-x^4}\,\mathrm{d}x = \qquad\qquad \int_{-4}^{4} \frac{4x}{(1+x^2)^2} + 4\,\mathrm{d}x =$$

Aufgabe 14 (*5 Punkte*)

(a) Zeichnen Sie die Menge $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) \neq -1 \text{ und } \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)+1} > 1 \right\}$ in der komplexen Zahlenebene.



(b) Sei $z = \sqrt{2}\cdot(\cos(\frac{\pi}{12}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{12}))$. Zeichnen Sie die Punkte $u = z^3$ und $v = z^3 - 3\mathrm{i}$ in der komplexen Zahlenebene.