Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

2. September 1991

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik I/II

1. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind alle acht Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Anfang Oktober im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 21. Oktober 1991 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

Aufgabe 1

a) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl z in der Form $z = a + b * i$:

$$z = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}$$

b) Wieviele 16-stellige Zahlen haben im Dezimalsystem die Quersumme 3? Beachten Sie, daß die führende Ziffer ungleich Null ist.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Vektoren $a = (-1, 0, 1)$, $b = (2, -2, 0)$ sowie der Punkt $P = (3, 1, 2)$.

a) Welchen Winkel φ, $0 \le \varphi \le \pi$, schließen a und b ein ?

b) Bestimmen Sie die Hesse'sche Normalform der Ebene E, die von a und b aufgespannt wird und den Nullpunkt enthält.

c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

Aufgabe 3

Die Umsätze zweier rivalisierender Firmen entwickeln sich wie folgt:
In jedem neuen Jahr werden 3/4 des bisherigen eigenen Umsatzes und 1/4 des bisherigen Umsatzes der konkurrierenden Firma eingenommen.

a) Stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix M auf.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

c) Im ersten Jahr habe die erste Firma keinen Umsatz (Neugründung). Nach wievielen Jahren ist die Differenz der Umsätze der beiden Firmen zum erstenmal auf weniger als 1% des Gesamtumsatzes gesunken?

Aufgabe 4

Gegeben seien die Funktionen

$$f(t) := \begin{pmatrix} 1+t \\ t^2 \\ 1-t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) := (1+x+xyz)$$

sowie

$$h_1 := g \circ f \qquad \text{und} \qquad h_2 := f \circ g\ .$$

a) Welche Dimension haben die Jacobi–Matrizen Df, Dg, Dh_1 und Dh_2?

b) Berechnen Sie $Df(t)$ und $Dg(x,y,z)$.

c) Berechnen Sie $Dh_1(0)$ und $Dh_2(0,0,0)$. Hinweis: Verwenden Sie die Kettenregel.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := xy + \log(2x+y)$$

a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0,1)$ nach $y = y(x)$ auflösbar ist.

b) Berechnen Sie durch implizites Differenzieren $y'(0)$ und $y''(0)$.

c) Geben Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $y(x)$ um den Nullpunkt bis zu Termen einschließlich zweiter Ordnung an.

Aufgabe 6

Auf einer geradlinigen Bahn bewegen sich drei Körper A, B und C. A bewegt sich relativ zu B mit der Geschwindigkeit v_{AB}, B bewegt sich relativ zu C mit der Geschwindigkeit v_{BC} und A bewegt sich relativ zu C mit der Geschwindigkeit v_{AC}. Setzt man $x := v_{AB}/c$, $y := v_{BC}/c$ und $z := v_{AC}/c$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist, dann gilt in der Newton'schen Mechanik

$$z = z_N(x, y) = x + y \ ,$$

der tatsächliche Wert ist nach der speziellen Relativitätstheorie jedoch

$$z = z_E(x, y) = \frac{x + y}{1 + xy} \ .$$

a) Entwickeln Sie z_N und z_E um den Nullpunkt bis zu Termen einschließlich 3. Ordnung. Hinweis: Entwickeln Sie zunächst die Funktion $1/(1 + xy)$ bis zu Termen 2. Ordnung.

b) Bis zu Termen welcher Ordnung stimmen beide Entwicklungen überein?

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Entwicklungen aus Teil a) näherungsweise den relativen Fehler $\Delta := (z_N - z_E)/z_N$ für den Fall $x = y = 10^{-1}$.

Aufgabe 7

Gegeben ist das Vektorfeld

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + y^2}, \frac{2y - \alpha x^2 y}{(1 + y^2)^2} \right) .$$

a) Bestimmen Sie $\alpha = \alpha^*$ so, daß das Vektorfeld F ein Potential φ besitzt und bestimmen Sie dieses. Wählen Sie dabei die Integrationskonstante so, daß $\varphi(0, 0) = 0$.

b) Die Äquipotentiallinien $K_c := \{(x, y) : \varphi(x, y) = c\}$ sind Kegelschnitte. Bestimmen Sie den Typ von K_c (Ellipse, Parabel usw.) in Abhängigkeit vom Parameter $c \geq 0$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $x''(t) + 9x(t) = 0$

b) $x''(t) + 9x(t) = e^{3t} - 3t$

c) $x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x(t)$