IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik 3 **4. 9. 2014**

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **kyb**, **mecha**, **phys**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 180 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle neun Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: 10** handbeschriebene Seiten DIN A4 sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erzielt werden.
- Bei **Aufgabe 1** ist für jede der Aussagen anzukreuzen, ob diese richtig bzw. falsch ist.
- Bei den **Aufgaben 2–3** werden nur Endergebnisse gewertet. Diese sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen. Rechenwege werden nicht berücksichtigt.
- Bei den **Aufgaben 4–9** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **13. 10. 2014** im LSF bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich zwischen **13. 10. 2014** und **17. 10. 2014** in Raum V57.8.160 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Name: | | Matrikelnummer: |

Aufgabe 1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

(i) $\operatorname{rot}(2\vec{F}) = 2(\operatorname{rot}\vec{F})$

(ii) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = 0$

(iii) $\iint_S \operatorname{grad} U \cdot d\vec{S} = 0$ für jede geschlossene Fläche S

(iv) $\vec{F} = (0, z, 0)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein skalares Potential.

(v) Jedes radiale Vektorfeld $f(r)\vec{e}_r$ besitzt ein Vektorpotential.

(vi) Das Arbeitsintegral ist für jedes Vektorfeld wegunabhängig.

(vii) Das Integral von $f(r) = 1/r$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, über die Einheitskugel existiert.

(viii) Der Gradient einer radialsymmetrischen Funktion ist parallel zu $\vec{e}_r$.

(ix) Die Differentialgleichung $u'' = 2\pi u$ besitzt periodische Lösungen, die nicht trivial sind.

(x) Die Differentialgleichung $xdx + ydy = 0$ ist exakt.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)
richtig										
falsch										

Aufgabe 2
Geben Sie den Wert des Integrals der Funktion $f = x + 2z$ über

a) das Geradensegment $C:\ t \mapsto \vec{r}(t) = (2t, 1, 3),\ 0 \le t \le 1$

b) das Quadrat $Q:\ x = 1,\ 0 \le y, z \le 3$

c) das Prisma $P:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le 2$

d) die Halbkugel $H:\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0$

e) die Halbkugelschale $S:\ r = 1,\ z \ge 0$

an.

Aufgabe 3
Der Körper

$$K:\ x^2 + y^2 = \varrho^2 \le 1,\ 0 \le z \le 2,\ x, y \ge 0\,,$$

stellt ein Viertel eines Zylinders dar. Bestimmen Sie

a) das Volumen von K

b) die Koordinaten des Schwerpunktes von K $\qquad s_x = s_y$: , s_z:

c) das Integral von $f = x + 2y + z/\pi$ über K

d) das Trägheitsmoment $\iiint_K \varrho^2 dxdydz$ bzgl. der z-Achse

Aufgabe 4 Bestimmen Sie für die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = -2y + e^x \qquad \text{b) } y' = \frac{x^2}{1+y} \qquad \text{c) } x dx + (y-2) dy = 0$$

die allgemeine Lösung sowie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$u'' + 3u' + 2u = f(t)$$

a) die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($f = 0$),
b) die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$,
c) eine partikuläre Lösung für $f(t) = \mathrm{e}^t$.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\vec{F} = (y, xz, 2z)^{\mathrm{t}}$
a) $\operatorname{div} \vec{F}$ und $\operatorname{rot} \vec{F}$
sowie für den Körper $K: x^2 + y^2 \leq 1 - z$, $0 \leq z \leq 1$ mit Mantel M, Grundfläche D und nach außen gerichteter Normalen

$$\text{b) } \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S} \qquad \text{c) } \iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} \qquad \text{d) } \iint_M \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}\,.$$

Aufgabe 7 Für welchen Wert α_* des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$\vec{F}_\alpha = (-3y, \alpha x + 2y)^{\mathrm{t}}$$

ein Potential und wie lautet dieses? Berechnen Sie für den Weg $C: t \mapsto (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$,

$$\text{a) } \int_C \vec{F}_{\alpha_*} \cdot d\vec{r} \qquad \text{b) } \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}\,.$$

Aufgabe 8 Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \max(x, 0)$, $-\pi \leq x < \pi$, und bestimmen Sie
a) die Fourier-Transformierte der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } -\pi \leq x < \pi, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k und die reellen Fourier-Koeffizienten a_k und b_k der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion f.
c) den Wert der Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$.

Aufgabe 9
Bestimmen Sie die Möbius-Transformation, die 0, 1 und ∞ auf 0, 1 und i abbildet. Geben Sie ebenfalls das Bild von i sowie die inverse Transformation an. Auf welche Menge wird die reelle Achse abgebildet?