IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik 3 — Herbst 2014

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

(i) $\operatorname{rot}(2\vec{F}) = 2(\operatorname{rot}\vec{F})$

(ii) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = 0$

(iii) $\iint_S \operatorname{grad} U \cdot d\vec{S} = 0$ für jede geschlossene Fläche S

(iv) $\vec{F} = (0, z, 0)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein skalares Potential.

(v) Jedes radiale Vektorfeld $f(r)\vec{e}_r$ besitzt ein Vektorpotential.

(vi) Das Arbeitsintegral ist für jedes Vektorfeld wegunabhängig.

(vii) Das Integral von $f(r) = 1/r$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, über die Einheitskugel existiert.

(viii) Der Gradient einer radialsymmetrischen Funktion ist parallel zu $\vec{e}_r$.

(ix) Die Differentialgleichung $u'' = 2\pi u$ besitzt periodische Lösungen, die nicht trivial sind.

(x) Die Differentialgleichung $xdx + ydy = 0$ ist exakt.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)
richtig										
falsch										

Lösung zu Aufgabe 1

(i) richtig

(ii) richtig

(iii) falsch

(iv) falsch

(v) falsch

(vi) falsch

(vii) richtig

(viii) richtig

(ix) falsch

(x) richtig

Aufgabe 2
Geben Sie den Wert des Integrals der Funktion $f = x + 2z$ über

a) das Geradensegment $C: \; t \mapsto \vec{r}(t) = (2t, 1, 3), \; 0 \le t \le 1$

b) das Quadrat $Q: \; x = 1, \; 0 \le y, z \le 3$

c) das Prisma $P: \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1 - x, \; 0 \le z \le 2$

d) die Halbkugel $H: \; r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \; z \ge 0$

e) die Halbkugelschale $S: \; r = 1, \; z \ge 0$

an.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\int_0^1 (2t + 2 \cdot 3) \, |(2,0,0)| \, dt = 2 + 12 = 14$

b) $\int_0^3 \int_0^3 (1 + 2z) \, dydz = \int_0^3 3 + 6z \, dz = 9 + [3z^2]_0^3 = 36$

c)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^2 x + 2z \, dzdydx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2x + 4 \, dydx \\ &= \int_0^1 -2x^2 - 2x + 4 \, dx = -2/3 - 1 + 4 = 7/3 \end{aligned}$$

d) Kugelkoordinaten $\rightsquigarrow$

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (r \sin\vartheta \cos\varphi + 2r \cos\vartheta) \, r^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta dr$$

Symmetrie $\rightsquigarrow$

$$0 + [r^4/4]_0^1 \cdot [\sin^2 \vartheta]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \pi/2$$

e) Symmetrie $\rightsquigarrow$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta = [\sin^2 \vartheta]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = 2\pi$$

Aufgabe 3
Der Körper

$$K:\, x^2+y^2=\varrho^2\le 1,\ 0\le z\le 2,\ x,y\ge 0\,,$$

stellt ein Viertel eines Zylinders dar. Bestimmen Sie

a) das Volumen von K

b) die Koordinaten des Schwerpunktes von K $s_x=s_y$: , s_z:

c) das Integral von $f=x+2y+z/\pi$ über K

d) das Trägheitsmoment $\iiint_K \varrho^2 dxdydz$ bzgl. der z-Achse

---

Lösung zu Aufgabe 3
a)

$$\operatorname{vol} K=\pi\cdot 1^2\cdot 2/4=\pi/2$$

b)

$$\frac{\pi}{2}s_x=\int_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \underbrace{\varrho\cos\varphi}_{x}\ \varrho d\varrho d\varphi dz = 2\,[\sin\varphi]_0^{\pi/2}\cdot[\varrho^3/3]_0^1=2/3\,,$$

d.h. $s_x=s_y=4/(3\pi)$

Symmetrie $\rightsquigarrow$ $S_z=1$

c)

$$\iiint_K x+2y+z/\pi\,dxdydz=\operatorname{vol}K\ \cdot\ (s_x+2s_y+s_z/\pi)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)=5/2$$

d)

$$\int_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \varrho^2\ \varrho d\varrho d\varphi dz=2\cdot\pi/2\cdot[\varrho^4/4]_0^1=\pi/4$$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie für die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = -2y + e^x \qquad \text{b) } y' = \frac{x^2}{1+y} \qquad \text{c) } xdx + (y-2)dy = 0$$

die allgemeine Lösung sowie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

Lösung zu Aufgabe 4
a) linear $\rightsquigarrow$ $y = y_h + y_p$

$$y_h = c\mathrm{e}^{-2x}$$

Ansatz $y_p = \gamma \mathrm{e}^x$ $\rightsquigarrow$

$$\gamma = -2\gamma + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 1/3$$

allgemeine Lösung $y = c\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^x/3$
$y(0) = 1 \implies c = 2/3$

b) separabel

$$(1+y)y' = x^2$$

Integration $\rightsquigarrow$

$$\frac{1}{2}(1+y)^2 = \frac{1}{3}x^3 + c$$

Auflösen nach y $\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung

$$y = -1 \pm \sqrt{2x^3/3 + 2c}$$

$y(0) = 1 \implies c = 2$ und $y = -1 + \sqrt{2x^3/3 + 4}$

c) exakt, da $\partial_y x = 0 = \partial_x (y-2)$
Integration $\rightsquigarrow$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 = c$$

Auflösen nach y $\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung

$$y = 2 \pm \sqrt{2c - x^2}$$

$y(0) = 1 \implies c = 1/2$ und $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$

Aufgabe 5
Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$u'' + 3u' + 2u = f(t)$$

a) die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($f = 0$),
b) die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen $u(0) = 1,\ u'(0) = 0$,
c) eine partikuläre Lösung für $f(t) = \mathrm{e}^t$.

Lösung zu Aufgabe 5
a) charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

allgemeine Lösung

$$u = a\mathrm{e}^{-2t} + b\mathrm{e}^{-t}$$

b) Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{rcccrcl} u(0) & = & 1 & \Longrightarrow & a + b & = & 1 \\ u'(0) & = & 0 & \Longrightarrow & -2a - b & = & 0 \end{array}$$

also $b = -2a$ und

$$a = -1, \quad b = 2$$

c) Ansatz $u = c\mathrm{e}^t \ \rightsquigarrow$

$$(c + 3c + 2c)\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t\,,$$

d.h. $c = 1/6$

Aufgabe 6
Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\vec{F} = (y, xz, 2z)^{\mathrm{t}}$
a) $\operatorname{div} \vec{F}$ und $\operatorname{rot} \vec{F}$
sowie für den Körper $K : x^2 + y^2 \le 1 - z,\ 0 \le z \le 1$ mit Mantel M, Grundfläche D und nach außen gerichteter Normalen

$$\text{b)} \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S} \qquad \text{c)} \iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} \qquad \text{d)} \iint_M \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 6
a) Divergenz und Rotation:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 0 + 2 = 2, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = (0 - x, 0 - 0, z - 1)^{\mathrm{t}}$$

b) $\vec{F}_{|D} = (y, 0, 0)^{\mathrm{t}} \perp d\vec{S} \implies$

$$\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

c) Satz von Gauß $\implies$

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{F}\, dK - \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S} = 2 \cdot \operatorname{vol}(K) \\ &= 2 \cdot 2\pi \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr = 4\pi(1/2 - 1/4) = \pi \end{aligned}$$

d) Satz von Stokes $\implies$

$$\iint_M \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit $C : t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ der Randkurve von M
$\implies$

$$\iint_M \ldots = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\pi$$

Aufgabe 7
Für welchen Wert α_* des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$\vec{F}_\alpha = (-3y, \alpha x + 2y)^{\mathrm{t}}$$

ein Potential und wie lautet dieses? Berechnen Sie für den Weg $C : t \mapsto (t, t^2)$, $0 \le t \le 1$,

$$\text{a)} \int_C \vec{F}_{\alpha_*} \cdot d\vec{r} \qquad \text{b)} \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}\,.$$

Lösung zu Aufgabe 7
Potential:

$$\operatorname{rot} \vec{F}_\alpha = \partial_x(\alpha x + 2y) - \partial_y(-3y) = \alpha + 3$$

$\implies \alpha = -3$

Integration nach x und y

$$\begin{aligned} U_x &= -3y \quad \implies \quad U = -3xy + g(y) \\ U_y &= -3x + 2y = -3x + g'(y) \quad \implies \quad g(y) = y^2 + c\,, \end{aligned}$$

d.h. $U = y^2 - 3xy + c$

Arbeitsintegrale:
für $\alpha_* = -3$,

$$\int_C \vec{F}_{\alpha_*} \cdot d\vec{r} = U(1,1) - U(0,0) = -2$$

für $\alpha = 1$,

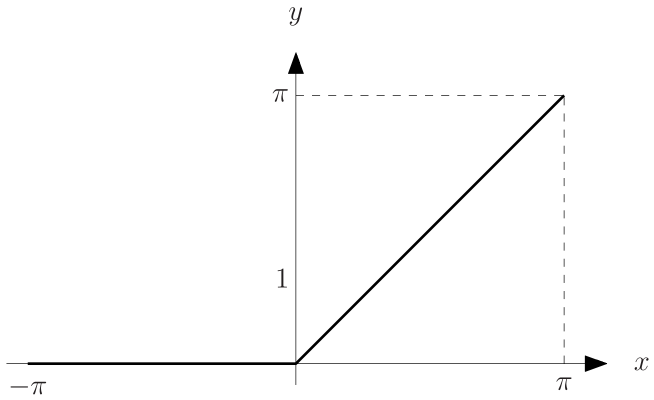
$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -3t^2 \\ t + 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -t^2 + 4t^3 \, dt = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 8
Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \max(x, 0)$, $-\pi \le x < \pi$, und bestimmen Sie
a) die Fourier-Transformierte der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } -\pi \le x < \pi, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k und die reellen Fourier-Koeffizienten a_k und b_k der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion f.
c) den Wert der Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$.

Lösung zu Aufgabe 8
Skizze:



a) Fourier-Transformierte:

$$\hat{g}(y) = \int_0^\pi x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,dx$$

partielle Integration $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \left[\frac{x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}}{-\mathrm{i}y}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}}{\mathrm{i}y}\,dx &= \frac{\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi y}}{y} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}}{y^2}\right]_0^\pi \\ &= \frac{(1+\mathrm{i}\pi y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi y} - 1}{y^2} \end{aligned}$$

b)
komplexe Fourier-Koeffizienten:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 \rightsquigarrow$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(k) = \frac{(1+\mathrm{i}\pi k)(-1)^k - 1}{2\pi k^2}, \quad k \ne 0$$

reelle Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 = \frac{\pi}{2} \\ a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \quad k > 0 \\ b_k &= \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

c) Parseval-Identität $\rightsquigarrow$

$$\sum_k |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

Aufgabe 9
Bestimmen Sie die Möbius-Transformation, die 0, 1 und ∞ auf 0, 1 und i abbildet. Geben Sie ebenfalls das Bild von i sowie die inverse Transformation an. Auf welche Menge wird die reelle Achse abgebildet?

Lösung zu Aufgabe 9
Ansatz

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

$0 \mapsto 0 \implies b = 0$ und o.B.d.A. $a = 1$
$\infty \mapsto \mathrm{i} \implies \mathrm{i} = 1/c$, d.h. $c = -\mathrm{i}$
$1 \mapsto 1 \implies$

$$1 = \frac{1}{-\mathrm{i}+d} \quad \implies \quad d = 1+\mathrm{i}$$

also

$$w = \frac{z}{-\mathrm{i}z+1+\mathrm{i}}$$

inverse Transformation

$$-\mathrm{i}wz + (1+\mathrm{i})w = z \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{(1+\mathrm{i})w}{\mathrm{i}w+1}$$

Bild von $z = \mathrm{i}$: $\mathrm{i}/(-\mathrm{i}^2+1+\mathrm{i}) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}$

$0, 1, \infty \mapsto 0, 1, \mathrm{i} \quad \implies \quad$ reelle Achse $\mapsto$ Kreis um $(1+\mathrm{i})/2$ mit Radius $\sqrt{2}/2$