Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen) (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden komplexe Zahlen:

$$z = (\sqrt{3} + i)^2, \qquad w = \frac{1}{1+i} \ .$$

Stellen Sie jeweils das Ergebnis sowohl in der Form $a + bi$, mit reellen Zahlen a und b, als auch in der Form $r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$, mit positivem r und $0 \leq \varphi < 2\pi$, dar.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es gilt: $(\sqrt{3} + i)^2 = 3 + 2\sqrt{3}\,i - 1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$. Die Polarkoordinaten ergeben sich aus $r = \sqrt{4 + 12} = 4$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

b) Man erhält

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Die Polarkoordinaten ergeben sich aus $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, somit $\varphi = \frac{7}{4}\pi$.

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem) (8 Punkte)
Sei das folgende lineare Gleichungssystem auf dem $\mathbb{R}^7$ gegeben.

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & -2x_6 & +x_7 & = 4, \\
2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +2x_5 & -x_6 & +x_7 & = 3, \\
-x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & -x_5 & -x_6 & & = 1.
\end{array}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems und geben Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Systems an.

Lösung zu Aufgabe 2 Wir lösen das Gleichungssystem, indem wir an der zugehörigen erweiterten Matrix Zeilenumformungen durchführen.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
2 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\
-1 & -2 & 3 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
0 & 3 & -5 & -3 & 0 & 3 & -1 & -5 \\
0 & -3 & 5 & 3 & 0 & -3 & 1 & 5
\end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
0 & 3 & -5 & -3 & 0 & 3 & -1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Aus der letzten Matrix kann man die Lösungsmenge berechnen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{3} - \frac{1}{3}t_1 - t_3 + t_4 - \frac{2}{3}t_5 \\ \frac{1}{3}(-5 + 5t_1 + 3t_2 - 3t_4 + t_5) \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix} \middle| \; t_1, \ldots, t_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Als Basis des Lösungsraums des homogenen Systems erhält man z.B.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Inverse Matrix) (6 Punkte)

Seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Entscheiden Sie in beiden Fällen, ob die inverse Matrix A^{-1} bzw. B^{-1} existiert und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Mit dem übliche Verfahren (Umformen der mit der Einheitsmatrix erweiterten Matrix A) erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Durch Vertauschen der zweiten und dritten Zeile ergibt sich nun die Inverse von A, nämlich:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix B ist nicht invertierbar, da beim Anwenden des Gaußverfahrens Nullzeilen entstehen.

Aufgabe 4 (Kapitalentwicklung) (6 Punkte)
Jemand zahlt 20 Jahre lang jedes Jahr zu Jahresanfang 20.000 € in einen Sparvertrag ein. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit 2% verzinst.

a) Wie hoch ist nach zwanzig Jahren der Kontostand?
b) Wie viele Jahre müsste der Sparvertrag bei sonst gleichen Konditionen laufen, damit am Ende mindestens eine Million Euro auf dem Konto sind?

Lösung zu Aufgabe 4

a) Die Formel für den Endwert einer vorschüssigen Rente lautet

$$K_n = r\,q\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

In der Aufgabe haben wir $r = 20.000$, $q = 1{,}02$ und $n = 20$. Damit ergibt sich

$$K_{20} = 20.000 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}02^{20} - 1}{0{,}02} \approx 495.666{,}34.$$

Der Kontostand nach 20 Jahren beträgt also 495.666,34 €.

b) Wir lösen die obige Formel für den Endwert einer vorschüssigen Rente nach n auf.

$$K_n = r\,q\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \iff (q-1)K_n = r\,q\,(q^n - 1) \iff$$
$$(q-1)K_n = r\,q^{n+1} - r\,q \iff q^{n+1} = \frac{q-1}{r}K_n + q \iff$$
$$n = \log_q\left(\frac{q-1}{r}K_n + q\right) - 1$$

Damit erhalten wir

$$n \geq \ln\left(0{,}02 \cdot \frac{1.000.000}{20.000} + 1{,}02\right) / \ln(1{,}02) - 1 \approx 34{,}5.$$

Der Vertrag müsste mindestens 35 Jahre Laufzeit haben.

Aufgabe 5 (Folgen und Reihen) (6 Punkte)

a) Seien die Folgen

$$a_n := \frac{1}{3^n}, \qquad b_n := \frac{2}{n+1}, \qquad c_n := \frac{n^2}{n^2 + 10n + 1000}$$

gegeben. Geben Sie für jede der drei Folgen jeweils an, ob es sich um eine konvergente Folge handelt, und was gegebenenfalls der Grenzwert ist.

b) Betrachten Sie nun die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Entscheiden Sie, ob diese konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Folgen a_n und b_n sind Nullfolgen, für die Folge c_n gilt

$$c_n = \frac{n^2}{n^2 + 10n + 1000} = \frac{1}{1 + 10\frac{1}{n} + 1000\frac{1}{n^2}} \to 1.$$

b) Die erste Reihe ist eine geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = \frac{1}{3}$. Diese konvergiert für $|q| < 1$. Für den Limes gilt nach der Summenformel für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{3}{2}$. Die zweite Reihe divergiert, denn bekanntlich divergiert die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Die dritte Reihe divergiert ebenfalls, da c_n keine Nullfolge ist.

Aufgabe 6 (Funktionsgrenzwerte) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}, \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$

Lösung zu Aufgabe 6

a) Mit der Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) Mit der dritten binomischen Formel erhält man:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$$

Alternativ: Auch das Anwenden der Regel von L'Hôpital führt hier zum Ziel.

Aufgabe 7 (Definitheit) (6 Punkte)

Welche der folgenden reellen symmetrischen Matrizen sind positiv definit, welche sind negativ definit?

$$A= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Wir berechnen zuerst die Determinante der Matrix A. Dazu führen wir Zeilenumformungen durch:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt also $\det(A) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Die beiden anderen Hauptminoren sind 4 und $4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 8$. Da alle Hauptminoren positiv sind, ist die Matrix positiv definit.

b) Die Matrix B ist negativ definit, denn eine Diagonalmatrix ist negativ definit, wenn ihre Diagonaleinträge alle negativ sind.

c) Die Matrix C ist weder positiv noch negativ definit, da der erste Hauptminor gleich Null ist.

d) Die Matrix D ist weder positiv noch negativ definit, denn der erste Hauptminor ist negativ und der zweite auch: $(-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -3$.

Aufgabe 8 (Lokale Extrema) (8 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + x + \frac{1}{2}y^2 + y + xy$ auf $\mathbb{R}^2$.

a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und die Hessematrix $\mathrm{Hess}f(x,y)$.
b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Der Gradient von f berechnet sich zu

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+1 \\ x+y+1 \end{pmatrix}.$$

Die Hessematrix von f ist konstant gleich

$$\mathrm{Hess}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zunächst bestimmen wir die lokalen Flachstellen von f, indem wir den Gradienten gleich Null setzen. Dies führt auf die Gleichungen

$$2x + y + 1 = 0,$$
$$x + y + 1 = 0.$$

Abziehen der unteren von der oberen Gleichung ergibt $x = 0$, woraus $y = -1$ folgt. Die einzige Lösung des Gleichungssystems und somit der einzige Flachpunkt von f ist also $(x,y) = (0,-1)$. Die (konstante) Hessematrix ist positiv definit, da die Hauptminoren 2 und 1, also beide positiv, sind. Also liegt in $(0,-1)$ ein lokales Minimum der Funktion f vor und dies ist das einzige lokale Extremum der Funktion.

Aufgabe 9 (Flachstellen unter Nebenbedingung) (6 Punkte)
Sei die Funktion $f(x,y,z) = x^2y^3z$ für positive reelle Zahlen x,y,z definiert. Finden Sie alle Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $x + y + z = 12$.

Lösung zu Aufgabe 9 Sei $g(x,y,z) := x + y + z - 12$. Wir berechnen die Gradienten von f und g:

$$\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^3z \\ 3y^2x^2z \\ x^2y^3 \end{pmatrix} \text{ und } \nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit eine Lösung von $\nabla_f(x,y,z) = \lambda \nabla_g(x,y,z)$ vorliegt, muss also $2xy^3z = 3y^2x^2z = x^2y^3$ gelten. Nun erhält man z.B. aus $2xy^3z = x^2y^3$, dass $x = 2z$ gilt und aus $3y^2x^2z = x^2y^3$, dass $y = 3z$ gilt. Aus der Nebenbedingung folgt damit $2z + 3z + z = 12$, somit $z = 2$. Schließlich erhalten wir $x = 2z = 4$ und $y = 3z = 6$. Die einzige Flachstelle ist somit $(4,6,2)$.

Aufgabe 10 (Taylorpolynom) (6 Punkte)
Sei die Funktion $f(x) = e^{x(x+1)}$ für reelle x gegeben. Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung am Entwicklungspunkt $x = 0$.

Lösung zu Aufgabe 10 Das Taylorpolynom $p(x)$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k.$$

Die Ableitungen $f^{(k)}(0)$ berechnen sich zu

$$\begin{array}{lcl@{\quad}c@{\quad}lcl}
f^{(0)}(x) & = & e^{x^2+x} & \Rightarrow & f^{(0)}(0) & = & 1, \\
f^{(1)}(x) & = & e^{x^2+x} \cdot (2x+1) & \Rightarrow & f^{(1)}(0) & = & 1, \\
f^{(2)}(x) & = & e^{x^2+x} \cdot (2x+1)^2 + e^{x^2+x} \cdot 2 & \Rightarrow & f^{(2)}(0) & = & 3, \\
f^{(3)}(x) & = & e^{x^2+x} \cdot (2x+1)^3 + e^{x^2+x} \cdot 4(2x+1) + e^{x^2+x} \cdot 2(2x+1) & \Rightarrow & f^{(3)}(0) & = & 7.
\end{array}$$

Wir erhalten also

$$p(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3$$

als Taylorpolynom dritter Ordnung für die Funktion $f(x) = e^{x(x+1)}$ am Entwicklungspunkt $x = 0$.

Aufgabe 11 (Differentialgleichung) (6 Punkte)

Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = \exp(x) \cdot y, \qquad y(0) = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 11 Setze $f(x) := \exp(x)$ und $g(y) := y$. Damit erhalten wir

$$F(x) := \int_0^x \exp(t)\, dt = [\exp(t)]_0^x = \exp(x) - 1$$

und

$$H(y) := \int_1^y t^{-1}\, dt = [\ln(t)]_1^y = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y).$$

Die gesuchte Lösung erhält man, wenn man

$$H(y(x)) = \ln(y(x)) = \exp(x) - 1 = F(x)$$

nach $y(x)$ auflöst:

$$y(x) = \exp(\exp(x) - 1).$$