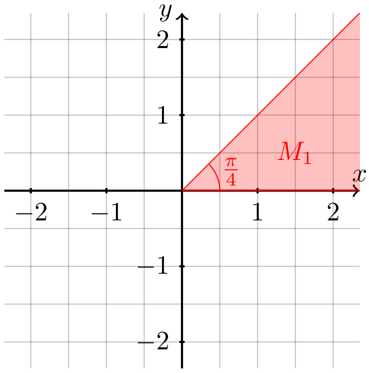
Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) **(a₁)** $M_1 := \{r \cdot e^{i\varphi} \mid r \geq 0, \varphi \in [0, \pi/4]\}$
Die Menge lässt sich direkt zeichnen:



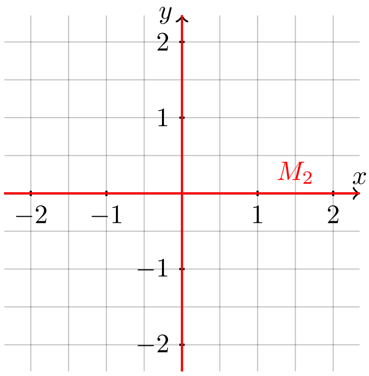
(a₂) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) = 0\}$
Sei $z = x + iy$, dann ist $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ bzw.

$$\operatorname{Im}(z^2) = 2xy.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Im}(z^2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \vee y = 0.$$

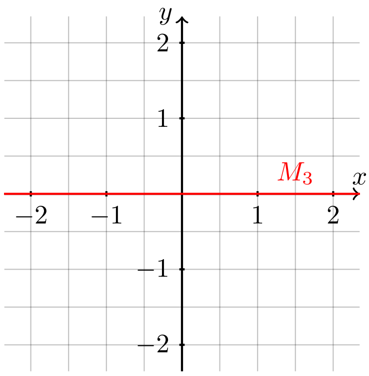
M_2 besteht also aus der rellen Achse vereinigt mit der imaginären Achse, im Bild



(a₃) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\}$
Sei $z = x + iy$, dann ist

$$z = \overline{z} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -y \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 0.$$

Damit entspricht M_3 gerade der rellen Achse, im Bild:

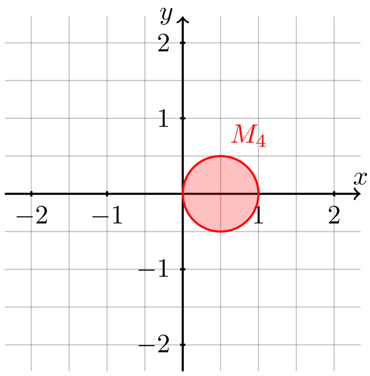


(a$_4$) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \mathrm{Re}\,(1/z) \geq 1\}$
Sei $z = x + \mathrm{i}y$, dann ist $1/z = (x - \mathrm{i}y)/(x^2 + y^2)$ und

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \overset{!}{\geq} 1$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad x \geq x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - x + y^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung beschreibt den Innenraum eines Kreises in der x, y-Ebene mit Mittelpunkt bei $(1/2, 0)$ und Radius $1/2$.



(b) Sei $z_0 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

(b$_1$) Gesucht ist die Polardarstellung von z_0. Dafür berechnet man den Betrag und das Argument von z_0:

$$|z_0| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\arg(z_0) = \pi + \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

(Beim Argument ist zu beachten, dass z_0 in der linken Halbebene mit $\mathrm{Re}\,(z) < 0$ liegt). Zusammengefasst erhalten wir für z_0 die Polardarstellung

$$z_0 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}.$$

(b$_2$) Man berechne z_0^{100}. Wir verwenden zunächst die Polardarstellung von z_0, mit ihr erhalten wir

$$z_0^{100} = \left[2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\right]^{100} = 2^{100} \cdot \mathrm{e}^{\frac{200}{3}\pi\mathrm{i}} = 2^{100} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$$

(Nebenrechnung: $\frac{200}{3} = \frac{198}{3} + \frac{2}{3} = 66 + \frac{2}{3}$, wobei $\mathrm{e}^{66\pi\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{33} = 1$). Um z_0 in der Darstellung $a + bi$ zu erhalten bemerken wir

$$z_0^{100} = 2^{100} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} = 2^{99} \cdot \left[2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\right] = 2^{99} \cdot [-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}] = -2^{99} + \mathrm{i}\,2^{99}\sqrt{3}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Man kann Eigenwerte und Eigenvektoren direkt ablesen, es sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \qquad &&\text{mit Eigenvektor } v_1 \\ \lambda_2 &= 1 \qquad &&\text{mit Eigenvektor } v_2 \\ \lambda_3 &= 4 \qquad &&\text{mit Eigenvektor } v_3. \end{aligned}$$

(b) Die gesuchte Matrix hat die Gestalt

$$_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}^{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Es sind

$$_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{B}}^{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{E}}^{\mathrm{id}} = \left({_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{B}}^{\mathrm{id}}}\right)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{E}}^{L} = {_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{B}}^{\mathrm{id}}} \cdot {_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}^{L}} \cdot {_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{E}}^{\mathrm{id}}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

(a) Gegeben ist die Gleichung

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 36, \tag{1}$$

diese soll in die Form $x^T Ax = 36$ gebracht werden. Die zugehörige Matrix A lässt sich sofort angeben:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Gesucht sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Dazu berechnet man die Determinante

$$\det(A - \lambda \cdot E) = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36.$$

Die Nullstellen von $\det(A - \lambda \cdot E)$ lassen sich z.B. mit Hilfe der "Mitternachtsformel" berechnen, man erhält

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[13 \pm \sqrt{169-144}\right] = \frac{1}{2}\left[13 \pm \sqrt{25}\right] = \frac{1}{2}\left[13 \pm 5\right],$$

d.h. $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 9$. Damit lassen sich direkt die zugehörigen Eigenvektoren bestimmen:

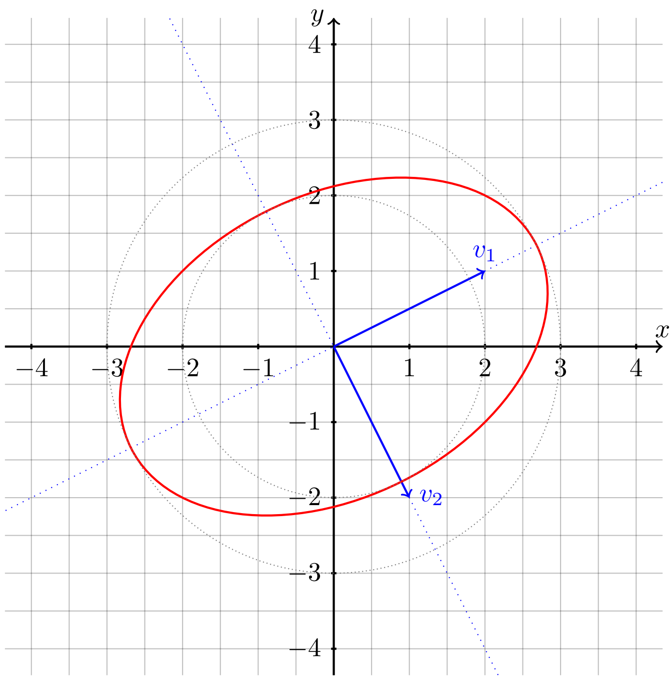
$$\text{zu } \lambda_1: \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2x_2 \quad \text{z.B. } v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{zu } \lambda_2: \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 = -x_2 \quad \text{z.B. } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Nach Transformation von (1) in das System bestehend aus Eigenvektoren von A hat die Gleichung die Gestalt

$$4\tilde{x}_1^2 + 9\tilde{x}_2^2 = 36.$$

Die Lösungsmenge von (1) ist also eine gedrehte Ellipse, die Richtungen der Halbachsen entsprechen den Richtungen der Eigenvektoren, die Länge der Halbachsen ergibt sich mit Hilfe des zugehörigen Eigenwerts aus $\sqrt{36/\lambda}$ (d.h. in Richtung von v_1 ergibt sich 3, in Richtung von v_2 ergibt sich 2). Wir erhalten somit folgendes Bild für die Lösungsmenge von (1):



Bewertungskriterien für die Skizze:

- Es ist eine Ellipse zu erkennen.
- Die Hauptachsenrichtungen entsprechen den Richtungen der berechneten Eigenvektoren.
- Die Hauptachsenlängen sind korrekt aus den Eigenwerten berechnet und richtig eingezeichnet.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(a) $v_1 = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

Kreuzprodukt $v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$.

Dreiecksfläche $A_\Delta = \frac{1}{2}\,\|v_1 \times v_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+16} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

(b) $E = \left\{ x = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) $E = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{1}{\sqrt{21}}\big(x_1 - 2x_2 - 4x_3\big) = \frac{5}{\sqrt{21}} \right\}$.

(d) $d = \frac{1}{\sqrt{21}}\big|x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5\big| = \frac{1}{\sqrt{21}}\big|4 - 2\cdot 7 - 4\cdot 12 + 5\big| = \frac{53}{\sqrt{21}}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3-n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3-n}}{3} = \frac{1}{3}.$

(b) $\lim_{n\to\infty} n \cdot \tan(1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan(1/n)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\tan(x)}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{1} = 1$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n+3^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^3.$

(d) $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \overset{\text{Stetigkeit ln}}{=} \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right) = \ln(\mathrm{e}) = 1.$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(\cos(x)), \qquad g(x) = \cos(\cos(x)).$$

(a) Gesucht sind die ersten beiden Ableitungen von f. Es sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x)), \\ f''(x) &= -\cos(x) \cdot \cos(\cos(x)) - \sin(x)^2 \cdot \sin(\cos(x)). \end{aligned}$$

(b) Gesucht sind die Nullstellen von f.
Wir bemerken zunächst, dass

$$f(x) = \sin(\cos(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Da nun aber $|\cos(x)| \leq 1$ und $\pi > 1$ ist, ist die Gleichung auf der rechten Seite in (2) nur für $k = 0$ lösbar. In diesem Fall ist

$$\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = (2l + 1)\pi/2,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Die Nullstellen von f sind also durch $x = (2l + 1)\pi/2$ mit $l \in \mathbb{Z}$ gegeben.

(c) Man zeige, dass g keine Nullstellen besitzt.
Wir gehen ähnlich vin in der vorherigen Tailaufgabe vor. Es ist

$$g(x) = \cos(\cos(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = (2k + 1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Da nun aber $|\cos(x)| \leq 1$ und $|(2k + 1)\pi/2| \geq \pi/2 > 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt besitzt die Gleichung auf der rechten Seite in (3) keine Lösung, g hat somit keine Nullstellen.

(d) Gesucht sind die Extrempunkte von f im Intervall $[-\pi, \pi]$.
Wir suchen zunächst die kritischen Stellen mit $f'(x) = 0$. Es ist

$$f'(x) = -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x)) = 0 \quad \overset{\textbf{(c)}}{\Leftrightarrow} \quad \sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

da wir uns nur für Extrema in $[-\pi, \pi]$ interessieren, genügt es

$$x_{-1} = -\pi, \qquad x_0 = 0, \qquad x_1 = \pi$$

zu betrachten. Um zu entscheiden welche Art von Extremum an den jeweiligen Stellen vorliegt, setzen wir diese Werte in die zweite Ableitung ein:

$$\begin{aligned} f''(x_{-1}) &= -\cos(-\pi) \cdot \cos(\cos(-\pi)) - \sin(-\pi)^2 \cdot \sin(\cos(-\pi)) \\ &= 1 \cdot \cos(-1) + 0 \cdot \sin(-1) = \cos(-1) > 0, \\ f''(x_0) &= -\cos(0) \cdot \cos(\cos(0)) - \sin(0)^2 \cdot \sin(\cos(0)) \\ &= -1 \cdot \cos(1) + 0 \cdot \sin(1) = -\cos(1) < 0, \\ f''(x_1) &= -\cos(\pi) \cdot \cos(\cos(\pi)) - \sin(\pi)^2 \cdot \sin(\cos(\pi)) \\ &= 1 \cdot \cos(-1) + 0 \cdot \sin(-1) = \cos(-1) > 0. \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir

- bei $(-\pi, \sin(-1))$ einen Tiefpunkt,
- bei $(0, \sin(1))$ einen Hochpunkt und
- bei $(\pi, \sin(-1))$ einen Tiefpunkt.

Aufgabe 7 (7 Punkte)

(a) Wir haben

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(2x) \\ f'(x) &= 2\cos(2x) \\ f''(x) &= -4\sin(2x) \\ f'''(x) &= -8\cos(2x) \\ f''''(x) &= 16\sin(2x) = 16f(x). \end{aligned}$$

(b) Wegen obiger Periodizität gilt mit $k \geq 1$ und $i \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$f^{(4k+i)} = 2^{4k} f^{(i)},$$

wobei man $f^{(i)}$ aus (a) erhält.

(c) Für die Taylorreihe erhalten wir:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{j!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k}}{(4k)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{4k} - 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k}}{(4k+2)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{4k+2}.$$

(d) Die Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$, da sie eine analytische Funktion darstellt.
Alternativ sieht man dies auch mit dem Wurzelkriterium, da $\sqrt[k]{(4k)!}$ bzw. $\sqrt[k]{(4k+2)!}$ gegen unendlich geht und die Terme im Zähler beschränkt sind, nachdem die k-te Wurzel gezogen wurde.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

(a)
$$\begin{aligned}\int \underbrace{(x^2+1)}_{=u}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{=v'}\,\mathrm{d}x &= (x^2+1)\mathrm{e}^x - \int \underbrace{2x}_{=f}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{=g'}\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2+1)\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + \int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2+1)\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c \\ &= \big(x^2-2x+3\big)\,\mathrm{e}^x + c\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \quad \left(u=\ln(x),\ \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{3}\,u^{3/2}+c \\ &= \frac{2}{3}\big(\ln(x)\big)^{3/2}+c \quad \text{(Rücksubstitution)}\end{aligned}$$

(c) Partialbruchzerlegung:

Ansatz:
$$\begin{aligned}\frac{2x^2+x+2}{(x-2)(x^2+2)} &= \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2} \\ \Leftrightarrow\ 2x^2+x+2 &= A(x^2+2)+(Bx+C)(x-2)\end{aligned}$$

Koeffizienten bestimmen:
$$\begin{aligned} x=2 &\ \Rightarrow\ 12=6A &&\Rightarrow\ A=2 \\ x=0 &\ \Rightarrow\ 2=2A-2C=4-2C &&\Rightarrow\ C=1 \\ x=1 &\ \Rightarrow\ 5=3A-(B+C)=5-C &&\Rightarrow\ B=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x^2+x+2}{(x-2)(x^2+2)}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

Nebenrechnung:
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx \overset{u=x/\sqrt{2},\ dx=\sqrt{2}du}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+u^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(u)+c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c.\end{aligned}$$

Ergebnis:
$$\int \frac{2x^2+x+2}{(x-2)(x^2+2)}\,dx = 2\ln|x-2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c.$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2z+x \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^y \end{pmatrix}.$$

(a) Gesucht ist die Jakobimatrix $\mathrm{J}f(x,y,z)$:

$$\mathrm{J}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Gesucht ist die Jakobimatrix $\mathrm{J}g(x,y)$:

$$\mathrm{J}g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^y \\ \mathrm{e}^x & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Gesucht ist die Jakobimatrix $\mathrm{J}(g \circ f)(x,y,z)$. Hierfür können wir z.B. die Kettenregel nutzen:

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(g \circ f)(x,y,z) &= \mathrm{J}g(f(x,y,z)) \cdot \mathrm{J}f(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{2z+x} \\ \mathrm{e}^{x+y} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2z+x} & 0 & 2\mathrm{e}^{2z+x} \\ \mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{x+y} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ können wir zunächst $g \circ f$ berechnen und anschließend die gesuchte Jakobimatrix bestimmen. Für die Verkettung erhält man dann

$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2z+x} \\ \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix}.$$ 1

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Der Quader habe die Seitenlängen a, b, c. Wir verwenden die Nebenbedingung in der Form

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0.$$

Es ist das Maximum der Funktion $V(a, b, c) = abc$ mit $a, b, c \geq 0$ unter der Nebenbedingung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

gesucht. Die Menge $\big\{(a, b, c) : a, b, c \geq 0 \ \wedge \ a^2 + b^2 + c^2 = 1\big\}$ ist eine Viertelkugel und ist kompakt (beschränkt und abgeschlossen). Also nimmt die stetige Funktion V auf dieser Menge ihr Minimum und Maximum an. Da v nichtnegativ ist, wird das Minimum in allen Punkten angenommen, in denen mindestens eine Koordinate Null ist. Das Maximum wird also in Punkten angenommen, in denen $a, b, c > 0$ gilt. Nach der Methode von Lagrange müssen dies Punkte Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems sein:

$$\begin{array}{rcrcl} a^2 + b^2 + c^2 - 1 & & & = & 0 \\ b\,c & + & 2a\,\lambda & = & 0 \\ a\,c & + & 2b\,\lambda & = & 0 \\ a\,b & + & 2c\,\lambda & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (\alpha) \\ (\beta) \\ (\gamma) \\ (\delta) \end{array}$$

$b \cdot (\beta) - a \cdot (\gamma)$ liefert $b^2c - a^2c = 0$. Wegen $c > 0$ folgt $b^2 = a^2$.
$c \cdot (\beta) - a \cdot (\delta)$ liefert $bc^2 - a^2b = 0$. Wegen $b > 0$ folgt $c^2 = a^2$.
Aus der Nebenbedingung folgt schließlich $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{3}$, also $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Alternative Rechnung mit der Nebenbedingung $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - 1 = 0$:

$$\begin{array}{rcrcl} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - 1 & & & = & 0 \\ b\,c & + & 2a\,\lambda\,\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & = & 0 \\ a\,c & + & 2b\,\lambda\,\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & = & 0 \\ a\,b & + & 2c\,\lambda\,\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (\alpha) \\ (\beta) \\ (\gamma) \\ (\delta) \end{array}$$

Die restiche Rechnung verläuft genauso wie oben, der Faktor mit der Wurzel fällt dann genauso weg wie das λ.