Klausur zur Höheren Mathematik III (vertieft)

für **Luft- und Raumfahrttechnik, Materialwissenschaften**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle** Aufgaben.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zehn Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1–3** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 4–7** werden nur die Antworten bzw. Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 10.10.2014 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 14.10.2014 zwischen 13:00 und 15:00 Uhr in Raum V 57.8.122 statt.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen bei der Klausureinsicht oder vom **15.10.2014** bis **16.10.2014** jeweils zwischen 11:00 bis 12:00 Uhr mit Iris Köster (Raum 7.148) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f\colon [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \pi - |x|$$

soll in eine Fourier-Reihe $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ entwickelt werden.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_n und b_n für $n \geqq 1$.

(b) An welchen Stellen $x \in [-\pi,\pi)$ konvergiert die Fourierreihe F gegen f? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, indem Sie f an einer geeigneten Stelle x_0 auswerten.

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

Ein beschränkter Körper K im $\mathbb{R}^3$ sei berandet durch die Kreisscheibe

$$S := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \colon r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi), z = 0\right\}$$

und der Fläche

$$G := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \colon r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi), z = 1 - r^2\right\}.$$

n bezeichne den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor auf der (stückweisen regulären) Oberfläche von K. Man bestimme nun zum Vektorfeld

$$g(x,y,z) = (x,y,z)^T$$

a) den Fluss $\iint_S g \cdot n \,\mathrm{d}O$ durch S,

b) den Fluss $\iint_G g \cdot n \,\mathrm{d}O$ durch G und

c) das Dreifachintegral

$$h = \iiint_K z \,\mathrm{d}V.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt $S \in \mathbb{R}^3$ des Körpers K. Hierbei sei die Massendichteverteilung auf K identisch 1.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie alle nicht-trivialen Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$x \cdot u_{tt} = -u_x ,$$

die die Form $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ besitzen.

Für welche Lösungen ist zusätzlich die Bedingung $u(0,t) = \sin(t)$ erfüllt?

Name, Vorname: ______ **Matrikel-Nummer:** ______ **Studiengang:** ______

Aufgabe 4 (*6 Punkte*)

(a) Angenommen bei Busreisen betrage die Rücktrittswahrscheinlichkeit 20%. Das Busunternehmen verkauft für einen Bus mit 85 Plätzen 100 Tickets. Bezeichne X die Zufallsvariable, wieviele Plätze tatsächlich belegt werden.

Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mu(X)$ und die Varianz $\sigma^2(X)$.

$$\mu(X) = \boxed{}\,, \qquad \sigma^2(X) = \boxed{}$$

Bezeichne nun $F(x)$ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$. Bestimmen Sie mittels der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit $p(X \leqq 85)$, dass weniger als 85 Reisende erscheinen. Entnehmen Sie dabei die Werte der Standardnormalverteilung $\Phi(x)$ aus der angegebenen Tabelle. Geben Sie zuerst den Zusammenhang zwischen $F(x)$ und $\Phi(x)$ an.

$$F(x) = \Phi\left(\boxed{}\right), \qquad p(X \leqq 85) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=\boxed{}}^{\boxed{}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \boxed{}$$

(b) In den Urnen A und B befinden sich jeweils 5 Kugeln. In A sind 2 rote und 3 blaue Kugeln, in B 4 rote und eine blaue Kugel enthalten. Es werde eine zufällige Kugel aus einer zufällig gewählten Urne gezogen. Es sei X das Ereignis, dass die Kugel aus A stammt und Y das Ereignis, dass die gezogene Kugel rot ist. Bestimmen Sie $p\,(X|Y)$.

$$p\,(X|Y) = \boxed{}$$

Tabelle der Standardnormalverteilung $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$:

x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
$\Phi(x)$	0.5000	0.5199	0.5398	0.5596	0.5793	0.5987	0.6179	0.6368	0.6554	0.6736

x	1.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
$\Phi(x)$	0.6915	0.7088	0.7257	0.7422	0.7580	0.7734	0.7881	0.8023	0.8159	0.8289

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
$\Phi(x)$	0.8413	0.8531	0.8643	0.8749	0.8849	0.8944	0.9032	0.9115	0.9192	0.9265

x	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90	1.95
$\Phi(x)$	0.9332	0.9394	0.9452	0.9505	0.9554	0.9599	0.9641	0.9678	0.9713	0.9744

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 3y'' + 3y' + y = f(x)$.

(a) Stellen Sie das zugehörige charakteristische Polynom auf und berechnen Sie dessen Nullstellen. Hinweis: Die Nullstellen sind ganzzahlig.

$p(\lambda) = \boxed{}$, Nullstellen: $\boxed{}$

(b) Geben Sie ein Fundamentalsystem des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung an:

$\boxed{}$

Wie lautet die Lösung y_{hom} der zugehörigen homogenen Gleichung mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 1$? Geben Sie die Laplacetransformierte von y_{hom} an.

$y_{hom} = \boxed{}$, $L(y_{hom})(s) = \boxed{}$

(c) Geben Sie einen Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = -6\sin(x)$ an und berechnen Sie eine partikuläre Lösung $y_p(x)$.

Ansatz : $\boxed{}$, $y_p(x) = \boxed{}$

Geben Sie einen Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ an.

Ansatz : $\boxed{}$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der Vektoren v_1, v_2, v_3 sind Eigenvektoren von A? $\boxed{}$

(b) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 Hauptvektoren von A sind.

$\boxed{}$

(c) Geben Sie die Jordan - Normalform J von A und eine Transformationsmatrix T an, so dass $T^{-1}AT$ die Jordan-Normalform von A ist:

$J = \left(\boxed{} \right)$, $T = \left(\boxed{} \right)$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) Gegeben sei das Vektorfeld $g_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit dem reellen Parameter a

$$g_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -axy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g_a$:

$$\operatorname{rot} g_a = \boxed{}$$

(b) Geben Sie eine Parametrisierung der Strecke C_1 vom Punkt $P = (1,0,1)$ nach $Q = (2,0,2)$ an in Abhängigkeit vom Parameter t.

$$C_1(t) = \boxed{}$$

(c) Berechnen Sie den Wert des Kurvenintegrals:

$$I = \int_{C_1} g_a \,\mathrm{d}x = \int_{t=\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \,\mathrm{d}t = \boxed{}$$

(d) Für welches $a_0 \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld g_{a_0} ein Potential?

$$a_0 = \boxed{}$$

(e) Für welchen Wert von $c \in \mathbb{R}$ ist $u(x,y,z) = x^2y - cxz^3 + 3yz$ eine Potentialfunktion von g_{a_0}?

$$c = \boxed{}$$

(f) Berechnen Sie den Wert des Integrals $I = \int_{C_2} g_{a_0} \mathrm{d}x$ längs eines Halbkreises C_2 von dem Punkt $P_1 = (0,0,0)$ zum Punkt $P_2 = (1,1,1)$.

$$I = \boxed{}$$