Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f\colon [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \pi - |x|$$

soll in eine Fourier-Reihe $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ entwickelt werden.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_n und b_n für $n \geqq 1$.

(b) An welchen Stellen $x \in [-\pi,\pi)$ konvergiert die Fourierreihe F gegen f? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, indem Sie f an einer geeigneten Stelle x_0 auswerten.

(a) Da $f(x)$ symmetrisch ist, ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\,\mathrm{d}\,x = \pi$.

Wir müssen also nur die Koeffizienten a_n für $n \geqq 1$ bestimmen.

Für a_n mit $n \geqq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x \\
=& \frac{2}{n\pi}\left[(\pi - x)\sin(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}\,x \\
=& -\frac{2}{n^2\pi}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
=& \frac{2}{n^2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}(-1)^n
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für die Fourierreihe $F(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi}\cos((2n+1)x)$.

(b) f ist stetig und stückweise differenzierbar und damit konvergiert die Fourierreihe F für alle $x \in [-\pi,\pi)$ gegen f.

(c) Wir werten f in $x_0 = 0$ aus:

$$\begin{aligned}
\pi =& f(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi} \cdot 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\pi^2}{8} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

Ein beschränkter Körper K im $\mathbb{R}^3$ sei berandet durch die Kreisscheibe

$$S := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \colon r \in [0,1], \varphi \in [0, 2\pi), z = 0\right\}$$

und der Fläche

$$G := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \colon r \in [0,1], \varphi \in [0, 2\pi), z = 1 - r^2\right\}.$$

n bezeichne den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor auf der (stückweisen regulären) Oberfläche von K. Man bestimme nun zum Vektorfeld

$$g(x,y,z) = (x,y,z)^T$$

a) den Fluss $\iint_S g \cdot n \,\mathrm{d}O$ durch S,

b) den Fluss $\iint_G g \cdot n \,\mathrm{d}O$ durch G und

c) das Dreifachintegral

$$h = \iiint_K z \,\mathrm{d}V.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt $S \in \mathbb{R}^3$ des Körpers K. Hierbei sei die Massendichteverteilung auf K identisch 1.

---

a) Der Körper K ist ein nach unten geöffnetes Paraboloid, abgeschnitten an der Ebene $z = 0$. Der Normalenvektor ist daher $\Big(0, 0, -1\Big)^{\mathsf{T}}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\iint_S g \cdot n \,\mathrm{d}O &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \mathrm{d}\,r\ \mathrm{d}\,\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} 0 \,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe vom Satz von Gauss:

Es ist ∂K bis auf eine Nullmenge disjunkte Vereinigung von S und G. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} g \cdot n \,\mathrm{d}O &= \iint_S g \cdot n \,\mathrm{d}O + \iint_G g \cdot n \,\mathrm{d}O \\
&= 0 + \iint_G g \cdot n \,\mathrm{d}O \\
&= \iint_G g \cdot n \,\mathrm{d}O
\end{aligned}$$

Daher kann man den Satz von Gauss anwenden, um den Fluss durch G zu berechnen

$$\iint_G g \cdot n \,\mathrm{d}\, O = \iiint_K \operatorname{div} g \,\mathrm{d}\, V$$

Man berechnet $\operatorname{div} g = \partial_x g_1 + \partial_y g_2 + \partial_z g_3 = 1 + 1 + 1 = 3.$

K lässt sich in Zylinderkoordinaten wie folgt parametrisieren

$$K = \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \mid r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi), z \in [0, 1-r^2]\right\}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\iint_G g \cdot n \,\mathrm{d}\, O = \iiint_K \operatorname{div} g \,\mathrm{d}\, V &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{1-r^2} 3r \,\mathrm{d}\, z \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \varphi \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{1} 3r(1-r^2) \,\mathrm{d}\, r \\ &= \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

Direkt mit der Definition von Oberflächenintegralen:

Der Mantel G ist parametrisiert via

$$\begin{aligned} X\colon [0,1] \times [0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1-r^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$X_r(r,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, -2r)^{\mathrm{T}} \qquad X_\varphi(r,\varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)^{\mathrm{T}},$$

und daher

$$X_r \times X_\varphi = \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet man

$$\begin{aligned}\iint_G g \cdot n \,\mathrm{d}\, O &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} g(X(r,\varphi)) \cdot X_r \times X_\varphi \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1-r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} (r^3 + r) \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \varphi \\ &= \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

c) Es ist

$$h = \iiint_K z \,\mathrm{d}\, V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{1-r^2} rz \,\mathrm{d}\, z \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \varphi$$
$$= \frac{\pi}{6}.$$

Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt $S = (S_x, S_y, S_z)$ auf der z-Achse, d.h. $S_x = S_y = 0$.

Es gilt

$$S_z = \frac{\iiint_K z \,\mathrm{d}\, V}{\iiint_K 1 \,\mathrm{d}\, V}$$
$$= \frac{h}{\iiint_K 1 \,\mathrm{d}\, V}$$

Das Integral im Nenner ist aber bis auf den Faktor 3 dasselbe Integral, das schon im Aufgabenteil **b)** berechnet wurde. Daher

$$S_z = \frac{\pi/6}{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

Somit liegt der Schwerpunkt in $(0, 0, \frac{1}{3})$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie alle nicht-trivialen Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$x \cdot u_{tt} = -u_x \ ,$$

die die Form $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ besitzen.

Für welche Lösungen ist zusätzlich die Bedingung $u(0,t) = \sin(t)$ erfüllt?

Ansatz:

$$\begin{aligned} & u(x,y) = v(x) \cdot w(t) \\ & \Rightarrow x \cdot v \cdot w_{tt} = -v_x \cdot w \\ & \Rightarrow \frac{-1}{x} \cdot \frac{v_x}{v} = \frac{w_{tt}}{w} \qquad = k = \text{const} \end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt die Differentialgleichungen

$$w_{tt} = k \cdot w \text{ und } v_x = -k \cdot x \cdot v\,.$$

Für $v_x = -k \cdot x \cdot v$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}_x v}{v} = -kx \\ & \Rightarrow \ln|v| = \frac{-k}{2} x^2 + c \\ & \Rightarrow v = \tilde{c} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{2}x^2} \text{ mit } \tilde{c} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Für $w_{tt} = k \cdot w$ erhalten wir mit Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} & \text{Für } k = 0 : w = a_k t + b_k \\ & \text{Für } k > 0 : w = a_k \mathrm{e}^{\sqrt{k}t} + b_k \mathrm{e}^{-\sqrt{k}t} \\ & \text{Für } k < 0 : w = a_k \sin(\sqrt{-k}t) + b_k \cos(\sqrt{-k}t) \end{aligned}$$

Für $u(0,t) = \sin(t)$ folgt

$$u(0,t) = v(0) \cdot w(t) = \tilde{c} \cdot w(t) = \sin(t).$$

Es gilt $w(t) = \frac{1}{\tilde{c}} \cdot \sin(t)$ und somit $k = -1$.

Insgesamt erhalten wir

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \sin(t).$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 4 (*6 Punkte*)

(a) Angenommen bei Busreisen betrage die Rücktrittswahrscheinlichkeit 20%. Das Busunternehmen verkauft für einen Bus mit 85 Plätzen 100 Tickets. Bezeichne X die Zufallsvariable, wieviele Plätze tatsächlich belegt werden.

Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mu(X)$ und die Varianz $\sigma^2(X)$.

$$\mu(X) = \boxed{80}\,, \quad \sigma^2(X) = \boxed{16}$$

Bezeichne nun $F(x)$ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$. Bestimmen Sie mittels der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit $p(X \leqq 85)$, dass weniger als 85 Reisende erscheinen. Entnehmen Sie dabei die Werte der Standardnormalverteilung $\Phi(x)$ aus der angegebenen Tabelle. Geben Sie zuerst den Zusammenhang zwischen $F(x)$ und $\Phi(x)$ an.

$$F(x) = \Phi\left(\boxed{\frac{X-80}{4}}\right), \quad p(X \leqq 85) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=\boxed{-\infty}}^{\boxed{1,25}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \boxed{0,894}$$

(b) In den Urnen A und B befinden sich jeweils 5 Kugeln. In A sind 2 rote und 3 blaue Kugeln, in B 4 rote und eine blaue Kugel enthalten. Es werde eine zufällige Kugel aus einer zufällig gewählten Urne gezogen. Es sei X das Ereignis, dass die Kugel aus A stammt und Y das Ereignis, dass die gezogene Kugel rot ist. Bestimmen Sie $p(X|Y)$.

$$p(X|Y) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Tabelle der Standardnormalverteilung $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$:

x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
$\Phi(x)$	0.5000	0.5199	0.5398	0.5596	0.5793	0.5987	0.6179	0.6368	0.6554	0.6736

x	1.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
$\Phi(x)$	0.6915	0.7088	0.7257	0.7422	0.7580	0.7734	0.7881	0.8023	0.8159	0.8289

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
$\Phi(x)$	0.8413	0.8531	0.8643	0.8749	0.8849	0.8944	0.9032	0.9115	0.9192	0.9265

x	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90	1.95
$\Phi(x)$	0.9332	0.9394	0.9452	0.9505	0.9554	0.9599	0.9641	0.9678	0.9713	0.9744

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 3y'' + 3y' + y = f(x)$.

(a) Stellen Sie das zugehörige charakteristische Polynom auf und berechnen Sie dessen Nullstellen. Hinweis: Die Nullstellen sind ganzzahlig.

$p(\lambda) = \boxed{(\lambda+1)^3}$, Nullstellen: $\boxed{\lambda = -1}$

(b) Geben Sie ein Fundamentalsystem des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung an:

$$\boxed{\{e^{-x},\ xe^{-x},\ x^2e^{-x}\}}$$

Wie lautet die Lösung y_{hom} der zugehörigen homogenen Gleichung mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 1$? Geben Sie die Laplacetransformierte von y_{hom} an.

$y_{hom} = \boxed{y = e^{-x}}$, $L(y_{hom})(s) = \boxed{\dfrac{1}{(s+1)}}$

(c) Geben Sie einen Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = -6\sin(x)$ an und berechnen Sie eine partikuläre Lösung $y_p(x)$.

Ansatz : $\boxed{a\sin x + b\cos x}$, $y_p(x) = \boxed{\dfrac{3}{2}(\sin(x) + \cos(x))}$

Geben Sie einen Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ an.

Ansatz : $\boxed{ax^3\mathrm{e}^{-x}}$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der Vektoren v_1, v_2, v_3 sind Eigenvektoren von A? $\boxed{v_2, v_3}$

(b) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 Hauptvektoren von A sind.

Eigenvektoren sind Hauptvektoren. Ferner gilt $(A - (-E_3))v_1 = v_3$.

(c) Geben Sie die Jordan - Normalform J von A und eine Transformationsmatrix T an, so dass $T^{-1}AT$ die Jordan-Normalform von A ist:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) Gegeben sei das Vektorfeld $g_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit dem reellen Parameter a

$$g_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -axy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g_a$:

$$\operatorname{rot} g_a = \boxed{(0, 0, (2+a)x)^T}$$

(b) Geben Sie eine Parametrisierung der Strecke C_1 vom Punkt $P = (1, 0, 1)$ nach $Q = (2, 0, 2)$ an in Abhängigkeit vom Parameter t.

$$C_1(t) = \boxed{(t, 0, t)^T, t \in [1, 2]}$$

(c) Berechnen Sie den Wert des Kurvenintegrals:

$$I = \int_{C_1} g_a \,\mathrm{d}x = \int_{t=\boxed{1}}^{\boxed{2}} \boxed{\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 + 3t \\ 3t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \,\mathrm{d}t = \boxed{15}$$

(d) Für welches $a_0 \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld g_{a_0} ein Potential?

$$a_0 = \boxed{-2}$$

(e) Für welchen Wert von $c \in \mathbb{R}$ ist $u(x, y, z) = x^2y - cxz^3 + 3yz$ eine Potentialfunktion von g_{a_0}?

$$c = \boxed{-1}$$

(f) Berechnen Sie den Wert des Integrals $I = \int_{C_2} g_{a_0} \mathrm{d}x$ längs eines Halbkreises C_2 von dem Punkt $P_1 = (0, 0, 0)$ zum Punkt $P_2 = (1, 1, 1)$.

$$I = \boxed{5}$$