Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Es sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie $\iint\limits_K \sin(x^2+y^2)dxdy$.

Lösungsvorschlag:
Durch Einführung von Polarkoordinaten bekommen wir das Integral:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_K \sin(x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sin(r^2)rdrd\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}(\cos(r^2)\right]_0^1 d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}(\cos(1)-1)d\varphi \\
&= \pi(1-\cos(1))
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

(a) (2 Punkte) Sei $h(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(z^2) \\ x^{10}-z+2y \\ xy \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} h$ und $\operatorname{div} h$.

(b) (4 Punkte) Es seien die Flächenstücke $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 0\ ,\ 0 \leq z \leq 1\}$ und $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z=1\}$ gegeben.
Bestimmen Sie den Ausfluss $A(h, T\cup D) = \iint\limits_{T\cup D} h\cdot n dO$.

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\operatorname{rot} h = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2z\cos(z^2)-y \\ 10x^9 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} h = 2$$

(b) $T\cup D$ ist der Rand des Körpers $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

Wir beschreiben den Körper mit Hilfe von Zylinderkoordinaten als

$$V = \{(r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi),\ z) | 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq r \leq z, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Wir benutzen den Satz von Gauss und erhalten dann für den Ausfluss

$$\begin{aligned} A(h, T \cup D) = \iiint_V \operatorname{div} h \, dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z 2r dr dz d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[r^2\right]_0^z dz d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 z^2 dz d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Alternativ: Der Körper V ist ein Kegel der Höhe 1 mit einem Kreis vom Radius 1 als Grundfläche. Da die Divergenz konstant ist, erhält man nach dem Satz von Gauss für den Ausfluss das Produkt aus der Divergenz und dem Volumen des Kegels.

$$A(h, T \cup D) = \iiint_V \operatorname{div} h \, dx dy dz = 2\frac{1}{3}\pi$$

Aufgabe 3: *(10 Punkte)*

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor von A.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

(d) (6 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2).$$

Also $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$.

(b) Ein Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda_1 = 0$ erfüllt die Gleichung $A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$. Das gibt $v_1 + v_2 = 0$. Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor.

Ein Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda_2 = 2$ erfüllt die Gleichung $(A - 2E_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$. Das gibt $v_1 - v_2 = 0$. Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor.

(c) Mit Hilfe der Teile (a), (b) bekommen wir, dass die allgemeine Lösung ist

$$f_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Die Wronksi Matrix des Systems ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{pmatrix} \quad .$$

Man kann die Inverse berechnen

$$(M(x))^{-1} = \frac{1}{2e^{2x}} \begin{pmatrix} e^{2x} & -e^{2x} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}e^{-2x} & \frac{1}{2}e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Mit dem Ansatz

$$c'(x) = (M(x))^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2x} \end{pmatrix} \quad .$$

erhalten wir durch Integration

$$c(x) = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{e^{-2x}}{2} \end{pmatrix}$$

Also hat das System eine partikuläre Lösung der Form

$$f_p(x) = M(x)c(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\frac{e^{-2x}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Deshalb ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4: *(7 Punkte)*
Bestimmen sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- ***Lösung der homogenen Gleichung***
  Zuerst muss die Lösung f_h der homogenen Gleichung berechnet werden. Dazu bestimmt man das charakteristische Polynom aus der Gleichung $y'' - 2y' + 1y = 0$:

  $$p(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.$$

  Dieses hat die doppelte Nullstelle $\lambda_{1/2} = 1$ und daher lautet die homogene Lösung:

  $$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- ***Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz nach Art der rechten Seite***
  Da 1 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist liegt doppelte Resonanz vor. Daher muss hier der Ansatz $f_p(x) = ax^2e^x$ lauten.

  Mit den Ableitungen
  $$f_p'(x) = 2axe^x + ax^2e^x \quad \text{und} \quad f_p''(x) = 2ae^x + 4axe^x + ax^2e^x$$
  folgt für die Differentialgleichung
  $$e^x = f_p''(x) - 2f_p'(x) + f_p(x) = 2ae^x + 4axe^x + ax^2e^x - 2(2axe^x + ax^2e^x) + ax^2e^x = 2ae^x$$
  und damit $a = \frac{1}{2}$.
  Die partikuläre Lösung lautet also
  $$f_p(x) = \frac{x^2}{2}e^x$$

- ***Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten***
  Alternativ kann man die partikuläre Lösung auch durch Variation der Konstanten bestimmen. Dazu muss man die Wronskimatrix $M(x)$ für $f_1(x)$, $f_2(x)$ aufstellen und ihre Inverse $(M(x))^{-1}$ berechnen
  $$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{pmatrix}, \quad (M(x))^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-x} + xe^{-x} & -xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}.$$
  Damit kann man ein Gleichungssystem für die Ableitungen der noch zu bestimmenden Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ aufstellen
  $$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} + xe^{-x} & -xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$
  und erhält nach Ausführen der Matrixmultiplikation
  $$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}.$$
  Man sieht sofort, dass
  $$\int -x dx = -\frac{x^2}{2}, \quad \int 1 dx = x.$$
  Damit lauten die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ letztendlich
  $$\begin{aligned} c_1(x) =& -\frac{x^2}{2}, \\ c_2(x) =& x, \end{aligned}$$

und man bekommt die partikuläre Lösung durch Einsetzen dieser Funktionen

$$\begin{aligned} f_p(x) &= c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) \\ &= -\frac{x^2}{2}e^x + xxe^x \\ &= \frac{x^2}{2}e^x. \end{aligned}$$

Zusammenfassend lautet die allgemeine Lösung als Linearkombination des homogenen und partikulären Anteils somit

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = (c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2})e^x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &y'(x) = xy(x) - x^2 y'(x) \\ &y(0) = 3. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

- ***Lösung der Gleichung***
  Durch Umstellen der Gleichnung sieht man, dass es sich um eine Differentialgleichnug mit getrennten Variablen handelt.
  $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{1+x^2}.$$
  Durch Integration erhalten wir
  $$\ln|f(x)| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \tilde{c}$$
  und daraus
  $$f(x) = c\sqrt{1+x^2}.$$
- ***Lösung des Anfangswertproblems***
  Es gilt also $f(0) = c = 3$ und damit $c = 3$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also
  $$f(x) = 3\sqrt{1+x^2}.$$

Aufgabe 6: *(10 Punkte)*
Die 4-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x+2, & x \in [-2, 0) \\ x-2, & x \in [0, 2) \end{cases}.$$

(a) (1 Punkt) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-8,8)$.

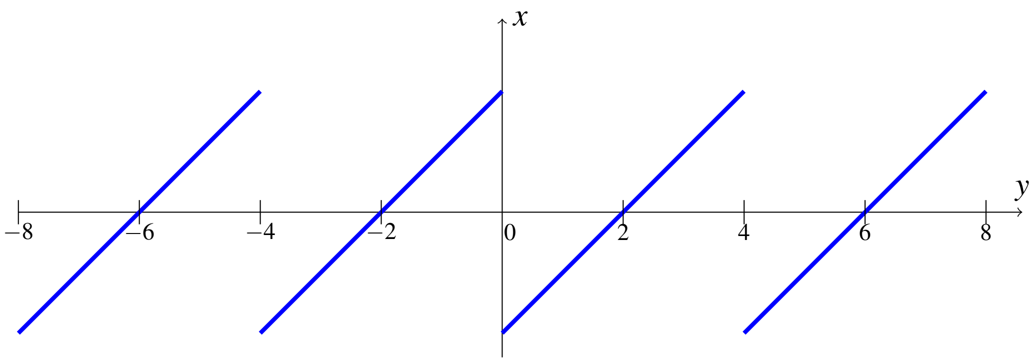
(b) (5 Punkte) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

(d) (2 Punkte) Entwickeln Sie die reelle Fourierreihe für $\cos(5\pi x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) Skizzieren von f:



(b) Bestimmung der Fourierreihe:

(1) Weil f ungerade ist gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(2) **Lösung mit Berücksichtigung der Symmetrie:**

Mit $T = 4$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir für die Koeffizienten

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x) dx$$

durch Integration:

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 (x-2) \sin(\frac{n\pi x}{2}) dx = \int_0^2 x \sin(\frac{n\pi x}{2}) dx - 2 \int_0^2 \sin(\frac{n\pi x}{2}) dx \\ &= \left[-\frac{2x \cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi} \right]_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos(\frac{n\pi x}{2}) dx + \left[\frac{4 \cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi} \right]_0^2 \\ &= \left[-\frac{2x \cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi} + \frac{4 \sin(\frac{n\pi x}{2})}{4n^2\pi^2} + \frac{4 \cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi} \right]_0^2 = -\frac{4}{n\pi}. \end{aligned}$$

Alternative Lösung ohne Berücksichtigung der Symmetrie:
Mit $T = 4$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir für die Koeffizienten

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx$$

durch Integration:

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx \\
=& \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx + \int_{-2}^{0} \sin(\frac{n\pi x}{2})dx - \int_{0}^{2} \sin(\frac{n\pi x}{2})dx \\
=& \left[-\frac{x\cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi}\right]_{-2}^{2} + \frac{1}{n\pi}\int_{-2}^{2}\cos(\frac{n\pi x}{2})dx \\
& - \left[\frac{2\cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{2\cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi}\right]_{0}^{2} \\
=& \left[-\frac{x\cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi} + \frac{2\sin(\frac{n\pi x}{2})}{n^2\pi^2}\right]_{-2}^{2} \\
& - \left[\frac{2\cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{2\cos(\frac{n\pi x}{2})}{n\pi}\right]_{0}^{2} \\
=& -\frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} = -\frac{4}{n\pi}.
\end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $(4k-4, 4k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{4k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(4k-4, 4k)$ $(k \in \mathbb{Z})$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $\{4k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 4, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 4k+0} f(x) + \lim_{x\to 4k-0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(2-2) = 0.$$

(d) Wir betrachten $\cos(5\pi x)$ als 4-periodische Funktion.

$$\cos(5\pi x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{k\pi x}{2}) + b_k \sin(\frac{k\pi x}{2})$$

Mit den bekannten Orthogonalitätsrelationen für $\cos(5\pi x)$ sieht man, dass

$$a_k = (\delta_{10,k} =) \begin{cases} 1, k = 10 \\ 0, k \neq 10 \end{cases}, k \in \mathbb{N}_0, \qquad b_k = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$