Aufgabe 1 (8 Punkte)

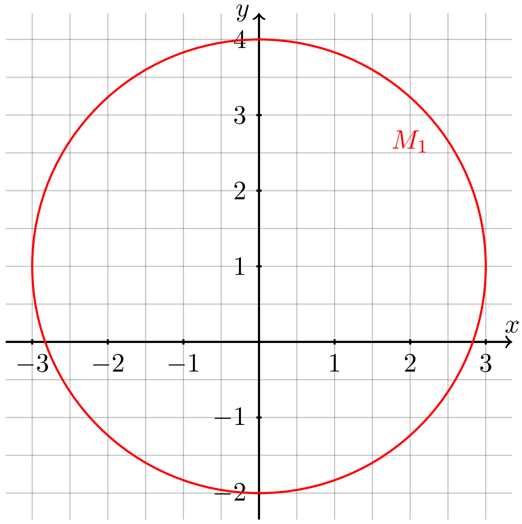
(a) Es ist der Realteil von $z = \frac{3+\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}}$ zu bestimmen.
Es ist

$$z = \frac{3+\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}} = \frac{(3+\mathrm{i})(4+2\mathrm{i})}{20} = \frac{10+10\mathrm{i}}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$ 0,5

Aus dieser Darstellung lassen sich der Real- und Imaginärteil von z ablesen, man erhält

$$\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2}.$$ 0,5

(b) **(b₁)** $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| = 3\}$
Die Menge lässt sich direkt zeichnen:



1

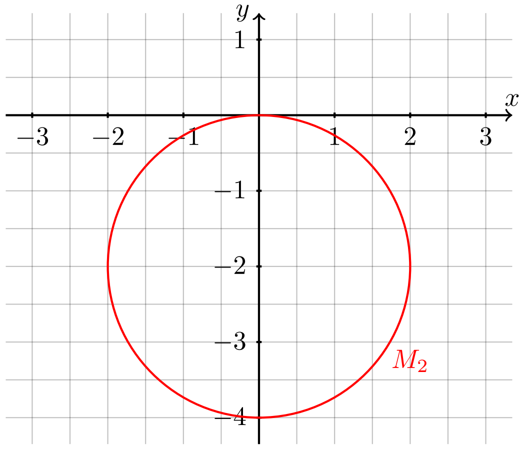
(b₂) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(\frac{1}{z}) = \frac{1}{4}\}$
Sei $z = x + \mathrm{i}y$, dann ist $\frac{1}{z} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$, bzw.

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$ 0,5

Daraus folgt

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad -4y = x^2 + y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4 = x^2 + (y+2)^2.$$ 0,5

M_2 ist also der Kreis in der x-y-Ebene mit Mittelpunkt $(0, -2)$ und Radius 2, im Bild:



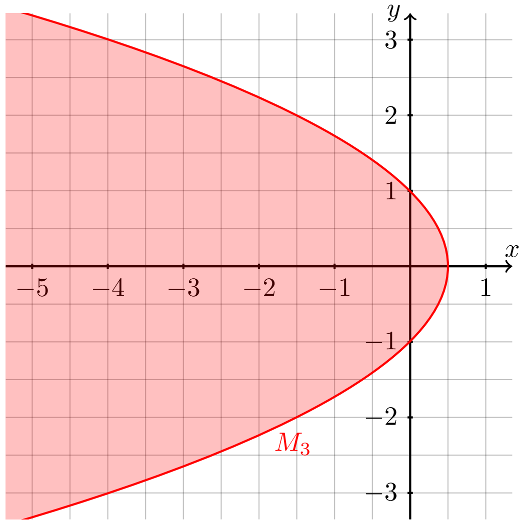
1

(b₃) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$
Sei $z = x + \mathrm{i}y$, dann ist $|z| + \mathrm{Re}(z) = \sqrt{x^2+y^2} + x$ bzw.

$$|z| + \mathrm{Re}(z) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad y^2 \leq 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

Die Menge beschreibt also das Innere (mit Rand) einer liegenden, nach links geöffneten Parabel mit Scheitel bei $(1/2, 0)$ in der x-y-Ebene. Im Bild:



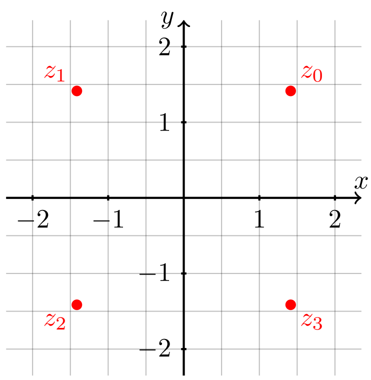
(c) Es ist die Gleichung $z^4 = -16$ zu lösen. Wegen $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$ ist $-16 = 16\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$. In dieser Polardarstellung lassen sich die 4 gesuchten Lösungen direkt angeben, man erhält

$$z_k = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i} + \frac{k\pi}{2}\mathrm{i}}$$

für $k = 0, 1, 2, 3$. Diese Lösungen sind nun noch in die Darstellung $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ umzurechnen. Der Tabelle auf dem Aufgabenblatt entnimmt man, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Damit ist $z_0 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$. Für die Umrechnung der übrigen Koordinaten bedient man sich entweder der Symmetrien der trigonometrischen Funktionen, oder der gesuchten Lösungen in der komplexen ebene. Letztere bilden ein Quadrat auf dessen einen Ecke z_0 liegt (vgl. Skizze):



Durch Spiegelung von z_0 erhält man alle weiteren Lösungen. Zusammengefasst haben wir

$$z_0 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}, \qquad z_1 = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}, \qquad z_2 = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}, \qquad z_3 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$C(\alpha) = \begin{pmatrix} 4 & \alpha - 3 & -2 \\ 2 & \alpha - 1 & -2 \\ 3 - \alpha & \alpha - 3 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3 Eigenvektoren von $C(\alpha)$ sind. Zusätzlich sind die zugehörigen Eigenwerte zu bestimmen:

Es ist

$$C(\alpha)\, v_1 = \begin{pmatrix} 4 & \alpha - 3 & -2 \\ 2 & \alpha - 1 & -2 \\ 3 - \alpha & \alpha - 3 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} = (\alpha - 1) v_1$$

$\Rightarrow$ v_1 ist Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha - 1$. 1

$$C(\alpha)\, v_2 = \begin{pmatrix} 4 & \alpha - 3 & -2 \\ 2 & \alpha - 1 & -2 \\ 3 - \alpha & \alpha - 3 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ \alpha + 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha + 1) v_2$$

$\Rightarrow$ v_2 ist Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha + 1$. 1

$$C(\alpha)\, v_3 = \begin{pmatrix} 4 & \alpha - 3 & -2 \\ 2 & \alpha - 1 & -2 \\ 3 - \alpha & \alpha - 3 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 v_3$$

$\Rightarrow$ v_3 ist Eigenvektor zum Eigenwert 2 . 1

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a)

$$
\begin{aligned}
\int \underset{\downarrow}{x^2} \underset{\uparrow}{\sin(x)}\ \mathrm{d}x &= \left[x^2(-\cos(x))\right] - \int (-2x\cos(x))\,\mathrm{d}x && \text{1} \\
&= [-x^2\cos(x)] + \int \underset{\downarrow}{2x} \underset{\uparrow}{\cos(x)}\ \mathrm{d}x \\
&= [-x^2\cos(x)] + [2x\sin(x)] - \int 2\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)] && \text{1}
\end{aligned}
$$

(b) Mit der Substitution $u = \ln(x)$ ergibt sich $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ bzw. $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Damit ist 1

$$
\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = [\ln(u)] = [\ln(\ln(x))]\,, \qquad \text{1}
$$

man beachte dabei, dass wegen $x > 1$ gilt, dass $u > \ln(1) = 0$, so dass die Betragstriche weggelassen werden können.

(c)

$$
\int 3^{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 3 \cdot \mathrm{e}^{x\ln(3)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{\ln(3)}\mathrm{e}^{x\ln(3)}\right] = \left[\frac{1}{\ln(3)}3^{x+1}\right]. \qquad \text{1}
$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

(a) Es ist der maximale Definitionsbereich von f zu bestimmen:
Damit f definiert ist, muss das Argument des Logarithmus strikt positiv sein, d.h.

$$x + \frac{1}{x} > 0.$$

Es ist aber

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{(x^2+1)}_{>0} \overset{!}{>} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > 0.$$

Der maximale Definitionsbereich D_f von f ist also

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\}.$$ 1

Man zeige, dass f keine Nullstellen besitzt:
Es ist $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x + \frac{1}{x} = 1$. Diese Gleichung besitzt in $\mathbb{R}$ jedoch keine Lösung. Eine der 3 hier skizzierten Varianten ist hier denkbar:

- Es ist

  $$x + \frac{1}{x} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x + 1 = 0$$ 1

  die Parabel mit $x^2 - x + 1$ hat jedoch keine Nullstellen.
- Für $x \in (0,1)$ ist $1/x > 1$, für $x \in ((1,\infty)$ ist $x > 1$. In beiden Fällen ist also

  $$x + \frac{1}{x} > 1$$ 1

  (der Fall $x = 1$ ist separat zu prüfen, aber trivial).
- Wegen $(x-1)^2 \geq 0$ und

  $$x + \frac{1}{x} \geq 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$ 1

  ist $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für alle $x > 0$.

(b) Man berechne die erste Ableitung von f und finde alle lokalen Extrema der Funktion:
Die erste Ableitng ist gegeben durch

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$ 1

Für die lokalen Extrema betrachten wir die (notwendige) Bedingung $f'(x) = 0$. Wegen $x + \frac{1}{x} \neq 0$ (siehe Teil **(a)**) erhalten wir daraus, dass

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

bzw., da $x \in D_f$ äquivalent $x = 1$. Genauer sehen wir, dass $f' < 0$ für $x < 1$ und $f' > 0$ für $x > 1$, d.h. f nimt an der Stelle $x = 1$ ein lokales Minimum ein, bzw. wir haben einen Tiefpunkt bei

$$T = (1, f(1)) = (1, \ln 2).$$ 1

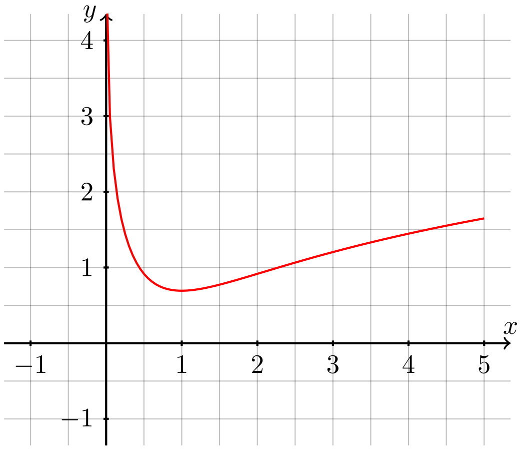
(c) Beide Grenzwerte lassen sich mit HIlfe der Regel von *Bernoulli-de l'Hôpital* berechnen. Man erhält

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1,$$ 1

bzw. nochmal nach der gleichen Rechnung

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -1,$$ 1

(d) Skizze des Funktionsgraphen:



1

Wegen Teilaufgabe **(c)** wissen wir, dass sich f für $x \to \infty$ wie $\ln x$ bzw. für $x \to 0$ wie $-\ln x$ verhält. Dies sollte ebenfalls aus dem Bild hervorgehen.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}.$$ 1

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2+n}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\overset{\text{geometr. Reihe}}{=}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$ 1,5

(c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}=1.$$ 1

(d)

$$\lim_{n\to\infty}2n\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\cdot\ln\left[\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}\right]=2\ln(\mathrm{e})=2.$$ 1,5

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Es ist das Taylorpolynom zweiter Stufe von $f(x,y) = x^y$ in $(1,1)$ zu berechnen:
Das gesuchte Taylorpolynom ist gegeben durch

$$T_2(f,(x,y),(1,1)) = f(1,1) + \big(\nabla_f(1,1)\big)^T \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot (x-1, y-1)\, H_f(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

Die drei Summanden werden einzeln berechnet:

- Es ist $f(1,1) = 1$. 1
- Der Gradient berechnet sich zu

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} y\, x^{y-1} \\ \ln x \cdot x^y \end{pmatrix}.$$ 1

  Daraus erhält man, dass $\big(\nabla_f(1,1)\big)^T = (1,0)^T$.

- Die Hessematrix berechnet sich zu

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y(y-1)\, x^{y-2} & (1 + y \cdot \ln x)\, x^{y-1} \\ (1 + y \cdot \ln x)\, x^{y-1} & (\ln x)^2\, x^y \end{pmatrix}.$$ 1

  Daraus erhält man, dass

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  bzw.

$$(x-1, y-1)\, H_f(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = 2(x-1)(y-1).$$

Zusammenfassend ist

$$T_2(f,(x,y),(1,1)) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2} \cdot 2(x-1)(y-1) = xy - y + 1.$$ 1

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Der Quader habe die Seitenlängen a, b, c. Wir verwenden die Nebenbedingung in der Form

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0.$$

Es ist das Maximum der Funktion $O(a, b, c) = 2ab + 2ac + 2bc$ mit $a, b, c \geq 0$ unter der Nebenbedingung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$ 1

gesucht. Die Menge $\{(a, b, c) : a, b, c \geq 0 \ \wedge \ a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ ist als derjenige Teil der Einheitssphäre, der im ersten Oktanten liegt, kompakt (beschränkt und abgeschlossen). Also nimmt die stetige Funktion O auf dieser Menge ihr Minimum und Maximum an. 1

Nach Aufgabenstellung wird das Maximum in der Menge

$$M = \{(a, b, c) : a, b, c > 0 \ \wedge \ a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$$

angenommen.

Wir wenden die Multiplikatorenmethode von Lagrange an und suchen Lösungen (a, b, c, λ) mit $a, b, c > 0$ des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 1 &= 0 && (\alpha) \\ 2b + 2c + 2a\,\lambda &= 0 && (\beta) \\ 2a + 2c + 2b\,\lambda &= 0 && (\gamma) \\ 2a + 2b + 2c\,\lambda &= 0 && (\delta) \end{aligned}$$ 1

$(\beta) - (\gamma)$ liefert $2(b - a) - 2\lambda(b - a) = 0$.

Angenommen, es gilt $b \neq a$, dann können wir durch $(b-a)$ dividieren und erhalten $2 - 2\lambda = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 1$. Eingesetzt in (β) ergibt dies

$$2a + 2b + 2c = 0.$$

Dies ist aber ein **Widerspruch**, da $a, b, c > 0$ sein müssen.

Es muss damit gelten

$$a = b.$$

Analog zeigt man, dass $a = c$. 2

Damit wird (α) zu $3a^2 = 1 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, und die maximale Oberfläche ist

$$O(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2.$$ 1

Also ist derjenige Quader mit größtmöglicher Oberfläche bei fester Raumdiagonalenlänge 1 der Würfel mit der Kantenlänge $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Alternative Rechnung mit der Nebenbedingung $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - 1 = 0$**:**

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - 1 &= 0 && (\alpha') \\ 2b + 2c + 2a\,\lambda \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} &= 0 && (\beta') \\ 2a + 2c + 2b\,\lambda \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} &= 0 && (\gamma') \\ 2a + 2b + 2c\,\lambda \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} &= 0 && (\delta') \end{aligned}$$

Aus der Nebenbedingung folgt $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$, so dass sich wieder das LGS $((\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ ergibt.

Alternative Rechnung zum Nachweis von $a = b = c$**:**

$$b \cdot (\beta) - a \cdot (\gamma) : 2b^2 + 2bc - 2a^2 - 2ac = 0 \quad \Leftrightarrow b^2 - a^2 + c(b - a) = 0 \Leftrightarrow (b - a)\underbrace{(b + a + c)}_{>0} = 0$$

$$c \cdot (\beta) - a \cdot (\delta) : 2bc + 2c^2 - 2a^2 - 2ab = 0 \quad \Leftrightarrow c^2 - a^2 + b(c - a) = 0 \Leftrightarrow (c - a)\underbrace{(c + a + b)}_{>0} = 0$$

Es folgt unmittelbar $a = b = c$.

Aufgabe 8 (11 Punkte)

Gegeben sind die Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}, \\ E_2 &= \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\right\}. \end{aligned}$$

(a) Es der Winkel α zwischen E_1 und E_2 zu berechnen:
Es ist

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = 30^\circ$$ 2

(b) Es ist zu begründen, dass E_1 ein Untervektorraum ist:
Untervektorraumkriterium:

- E_1 ist nicht leer, da der Ursprung drin liegt.
- Sind $(x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3) \in E_1$, so folgt

$$(x_1+y_1) + (x_2+y_2) + 2(x_3+y_3) = (x_1+x_2+2x_3) + (y_1+y_2+2y_3) = 0+0 = 0$$ 1

  d.h. es ist $(x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3) \in E_1$. Sei zusätzlich $t \in \mathbb{R}$, dann ist

$$tx_1 + tx_2 + 2tx_3 = t \cdot (x_1+x_2+2x_3) = t \cdot 0 = 0$$ 1

  d.h. es ist $t \cdot (x_1+x_2+2x_3) \in E_1$.

Somit ist E_1 ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

(c) Man bestimme eine ONB $\mathcal{B}$ von E_1:
Eine Basis ist gegeben durch $\{v_1, v_2\}$ mit den Richtungsvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ 1

Schmidtsches Orthogonalisierungeverfahren liefert:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$ 1

$$\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 2 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = -\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$ 1

$\{w_1, w_2\}$ ist eine ONB von E_1.

(d) Es sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an E_1. Es ist für jeden Punkt $(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$ der Bildpunkt zu berechnen und die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{E}}M^L_{\mathcal{E}}$ anzugeben ($\mathcal{E}$ = kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$):
Parameterdarstellung der zu E_1 orthogonalen Gerade durch (y_1,y_2,y_3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - t \\ y_2 - t \\ y_3 - 2t \end{pmatrix}$$ 1

Schnitt mit E_1:

$$y_1 - t + y_2 - t + 2(y_3 - 2t) = 0 \;\Leftrightarrow\; y_1 + y_2 + 2y_3 = 6t \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{6}(y_1 + y_2 + 2y_3).$$ 1

Die Koordinaten des Spiegelpunkts (z_1,z_2,z_3) erhält man, indem man den t-Wert verdoppelt:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + 2y_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ -\frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \end{pmatrix}$$ 1

Nun kann die Abbildungsmatrix abgelesen werden:

$${}_{\mathcal{E}}M^L_{\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$ 1

Aufgabe 9 (7 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist zu begründen, dass $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist:
Es ist

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right. = 6 + 2 + 0 - 2 - 4 - 0 = 2 \neq 0$$

1

Also ist $\{a, b, c\}$ linear unabhängig.
Die Dimension des $\mathcal{R}^3$ ist 3, also bildet $\{a, b, c\}$ eine Basis.

1

(b) Man finde die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{E} = \{e_, e_2, e_3\}$.
Es ist

$$x = x_1 \cdot a + x_2 \cdot b + x_3 \cdot c = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

1

(c) Man bestimme die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{E}}^{\mathrm{Id}}$.
Es ist

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{E}}^{\mathrm{Id}} = \left({}_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{B}}^{\mathrm{Id}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

1

Daraus erhält man die gesuchte Matrix durch Invertieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 9 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

1

D.h. es ist

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{E}}^{\mathrm{Id}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1

(d) Gegeben ist der Vektor $y = 4e_1 - 2e_2 + 3e_3$. Man berechne die Koordinaten von y bzgl. $\mathcal{B}$:
Es ist

$$(y)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{E}}^{\mathrm{Id}}(y)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1