

---

# Klausur zur Höheren Mathematik III

## für die Fachrichtungen: el

---

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel: 10 DIN A4 Seiten eigenhändig handbeschrieben.**  
Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle 4 Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **01. April 2015** über das Online-Portal LSF (<https://lsf.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

### Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **01. April 2015** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM III-Pöschel (<http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Poeschel-WS1415/>) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

bitte Rückseite beachten

Folgende Ableitungen und Funktionswerte könnten hilfreich sein ( $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $b \in (0, \infty)$ ):

$f(x)$	$x^a$	$e^x$	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$\cos(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	$b^x$	$\ln x $	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$x$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Gegeben sind die Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0 \text{ und } 0 \leq z \leq 4\}$$

und das Vektorfeld  $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  mit

$$g(x, y, z) = \left(x^3z + z^2, e^y, \frac{1}{4}x^4 - \sin(z)\right)^\top.$$

- (a) Geben Sie eine Parametrisierung von  $S$  in Zylinderkoordinaten an.
- (b) Berechnen Sie die Oberfläche von  $S$ .
- (c) Bestimmen Sie  $\operatorname{div}g$  und  $\operatorname{rot}g$ .
- (d) Bestimmen Sie den Betrag des Integrals

$$\left| \oint_{\partial S} g \cdot d\vec{s} \right|$$

wobei  $\partial S$  die Kreislinie  $\{(x, y, 4) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$  ist.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie die Lösung  $y = y(x)$  des Anfangswertproblems  $y' = x + xy^2$ ,  $y(0) = 1$ .
- (b) Sei die Differentialgleichung  $y'' + y' - 2y = 0$  gegeben.
  - i) Stellen Sie das zugehörige charakteristische Polynom auf und berechnen Sie dessen Nullstellen.
  - ii) Geben Sie ein Fundamentalsystem des Lösungsraums an.
  - iii) Bestimmen Sie diejenige Lösung mit  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$ .
- (c) Betrachten Sie nun die inhomogene Gleichung  $y'' + y' - 2y = f(x)$ .
  - i) Es sei nun  $f(x) = \sin(x)$ . Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung. Geben Sie weiter die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung an, die für  $x \rightarrow -\infty$  beschränkt bleibt.
  - ii) Geben Sie einen Ansatz zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung für  $f(x) = -x^2e^{-2x}$  an.

## Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y$$

sowie diejenige Lösung mit  $y(0) = (3, 0, 3)^\top$ .

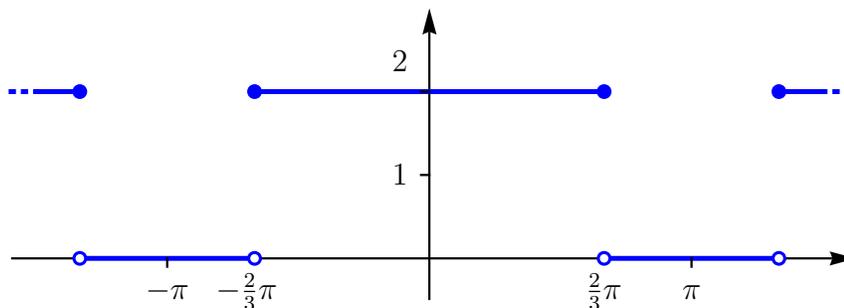
(b) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen sie  $e^{Ax}$  und  $e^{Bx}$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = By$ ,  $y(0) = (-2, 0, 1)^\top$ .

**Aufgabe 4 (10 Punkte)** Die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitze den folgenden Graphen.



(a) Welche Fourierkoeffizienten dieser Funktion sind auf jeden Fall 0?

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von  $f$  sowohl in reeller als auch in komplexer Form.

**Hinweis:** Terme der Form  $e^{\frac{2}{3}n\pi i}$  bzw.  $\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$  müssen hier nicht weiter vereinfacht werden.

(c) In welchen Punkten konvergiert die Fourierreihe *nicht* gegen  $f$ ?

Welche Werte hat sie stattdessen in diesen Punkten?

(d) Wie lautet die Parsevalsche Identität in diesem konkreten Fall?

Zu bestimmen ist also auch  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ .

(e) Berechnen Sie  $\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$  für  $n = 3k + \ell$ , wobei  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\ell \in \{0, 1, 2\}$ .

**Hinweis:** Das Ergebnis hängt nicht von  $k$  ab.