Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

3. September 1991

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik I/II

2. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind alle acht Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Anfang Oktober im NWZ II beim Raum 8. 155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 21. Oktober 1991 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Punktmenge, welche die $z \in \mathbf{C}$ mit

$$|z-i| = |z+i|$$

in der komplexen Zahlenebene bilden.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbf{C}$ der Gleichung

$$(z-i)^3 = -i$$

in der Form $z = a + b * i$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die $t \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

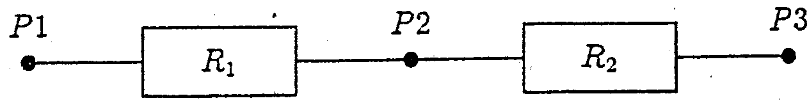
$$\begin{pmatrix} (t-1)^2 & 1 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

a) genau eine Lösung besitzt;

b) keine Lösung besitzt;

c) unendliche viele Lösungen besitzt. Geben Sie die Lösungen in diesem Fall an.

Aufgabe 3



Zwei seriell geschaltene Widerstände

An zwei seriell geschaltenen Widerständen R_1 und R_2 werden bei einer Stromstärke von $I = 1\ A$ die folgenden anliegenden Spannungen gemessen:

- Zwischen dem Punkt $P1$ und dem Punkt $P2$ liegt eine Spannung von $U_{12} = 101$ V.
- Zwischen dem Punkt $P2$ und dem Punkt $P3$ liegt eine Spannung von $U_{23} = 200$ V.
- Zwischen dem Punkt $P1$ und dem Punkt $P3$ liegt eine Spannung von $U_{13} = 304$ V.

a) Stellen Sie mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes $U = R * I$ das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Widerstände R_1 und R_2 auf, das sich aus den drei Messungen ergibt.

b) Das Gleichungssystem ist überbestimmt und aufgrund der Meßungenauigkeit nicht exakt lösbar. Bestimmen Sie Näherungswerte für R_1 und R_2, indem Sie das zugehörige Ausgleichsproblem lösen.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cdot \arctan\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = (x - 2y^2 + 3)(x - 5)$$

a) Bestimmen und skizzieren Sie die Gebiete in der xy–Ebene, in denen f positiv bzw. negativ ist.

b) Ermitteln Sie alle kritischen Punkte von f und bestimmen Sie deren Charakter.

Aufgabe 6

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln x)^2\,dx$

c) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{2}{x^2-1}\,dx$

Aufgabe 7

Gegeben seien Zylinderkoordinaten $(x,y,z) = (r\, cos\theta,\ r\,\sin\theta,\ \rho)$ sowie für $(x,y) \neq (0,0)$ das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{-x}{x^2+y^2},\ z\right)^t$$

a) Zerlegen Sie das Feld F in eine radiale, axiale und vertikale Komponente, d.h. bestimmen Sie skalare Funktionen $f(r,\theta,\rho)$, $g(r,\theta,\rho)$ und $h(r,\theta,\rho)$ so, daß

$$F = fe_r + ge_\theta + he_\rho\ ,$$

wobei $e_r = (\cos\theta,\sin\theta,0)^t$, $e_\theta = (-\sin\theta,\cos\theta,0)^t$, $e_\rho = (0,0,1)^t$ die Basisvektoren in Zylinderkoordinaten sind.

b) Berechnen Sie den Fluß Φ von F durch die Oberfläche des Zylinders

$$Z := \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq H\}\ , \qquad R,H \in \mathbb{R}^+$$

von innen nach außen.

Hinweis: Der Satz von Gauss ist hier nicht anwendbar, da das Vektorfeld nicht im gesamten Inneren des Zylinders definiert ist.

Aufgabe 8

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' + y' - 2y = e^{-2t}$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

c) Bestimmen Sie eine Lösung $\hat{y}(t)$ mit $\hat{y}(0) = 1$, welche für $t \to +\infty$ beschränkt bleibt.