Klausur zur Höheren Mathematik III

für die Fachrichtungen: kyb, mecha, phys

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel: 10 DIN A4 Seiten eigenhändig handbeschrieben**.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle 6 Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **01. April 2015** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **01. April 2015** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM III–Pöschel (`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Poeschel-WS1415/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

bitte Rückseite beachten

Folgende Ableitungen und Funktionswerte könnten hilfreich sein ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in (0,\infty)$):

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sind die Fläche

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z = 0 \text{ und } 0 \leqq z \leqq 4\}$$

und das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x,y,z) = \left(x^3 z + z^2, \mathrm{e}^y, \frac{1}{4}x^4 - \sin(z)\right)^\top.$$

(a) Geben Sie eine Parametrisierung von S in Zylinderkoordinaten an.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche von S.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{div} g$ und $\operatorname{rot} g$.

(d) Bestimmen Sie den Betrag des Integrals

$$\left| \oint_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right|$$

wobei ∂S die Kreislinie $\{(x,y,4) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$ ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems $y' = x + xy^2, \quad y(0) = 1$.

(b) Sei die Differentialgleichung $y'' + y' - 2y = 0$ gegeben.

i) Stellen Sie das zugehörige charakteristische Polynom auf und berechnen Sie dessen Nullstellen.

ii) Geben Sie ein Fundamentalsystem des Lösungsraums an.

iii) Bestimmen Sie diejenige Lösung mit $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$.

(c) Betrachten Sie nun die inhomogene Gleichung $y'' + y' - 2y = f(x)$.

i) Es sei nun $f(x) = \sin(x)$. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung. Geben Sie weiter die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung an, die für $x \to -\infty$ beschränkt bleibt.

ii) Geben Sie einen Ansatz zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = -x^2\mathrm{e}^{-2x}$ an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y$$

sowie diejenige Lösung mit $y(0) = (3, 0, 3)^\top$.

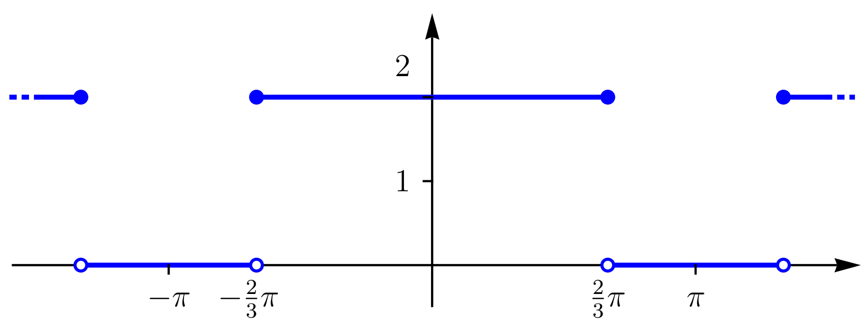
(b) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen sie e^{Ax} und e^{Bx} für $x \in \mathbb{R}$.

ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = By, \quad y(0) = (-2, 0, 1)^\top$.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze den folgenden Graphen.



(a) Welche Fourierkoeffizienten dieser Funktion sind auf jeden Fall 0?

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f sowohl in reeller als auch in komplexer Form.
Hinweis: Terme der Form $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}n\pi\mathrm{i}}$ bzw. $\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$ müssen hier nicht weiter vereinfacht werden.

(c) In welchen Punkten konvergiert die Fourierreihe *nicht* gegen f?
Welche Werte hat sie stattdessen in diesen Punkten?

(d) Wie lautet die Parsevalsche Identität in diesem konkreten Fall?
Zu bestimmen ist also auch $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$.

(e) Berechnen Sie $\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$ für $n = 3k + \ell$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ und $\ell \in \{0, 1, 2\}$.
Hinweis: Das Ergebnis hängt nicht von k ab.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Funktion $z \mapsto \overline{z}^2 + \overline{z}$ komplex differenzierbar ist.

(b) Für eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte $f(z) = 4$ für alle z mit $|z| = 2$.
Bestimmen Sie $f(1)$.

(c) Berechnen Sie

$$\operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{2 + \mathrm{e}^{3z}}{(z-1)^3}, 1 \right).$$

(d) Berechnen Sie

$$\oint_\gamma \frac{1}{z(z-2\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z,$$

wobei γ die entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie um i mit Radius $3/2$ ist.

(e) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=1000} \frac{1}{z(z-2\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Gegeben ist das Randwertproblem

$$u_{tt} = u_{xx} - 16u, \qquad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ gewöhnliche Differentialgleichungen für v und w.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine nichttriviale Lösung w, die die Randbedingungen erfüllt.

(c) Bestimmen Sie dazu die allgemeine Lösung v, die für alle t beschränkt bleibt.

(d) Geben Sie die allgemeine Lösung u des Randwertproblems an, die für alle t beschränkt bleibt.

(e) Bestimmen Sie diejenige Lösung u mit

$$u(0,x) = 4\cos(x),\ u_t(0,x) = 0, \qquad 0 \leqq x \leqq \pi.$$