Klausur zur Höheren Mathematik III

für die Fachrichtungen: kyb, mecha, phys

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel: 10 DIN A4 Seiten eigenhändig handbeschrieben**.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle 6 Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **01. April 2015** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **01. April 2015** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM III–Pöschel (`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Poeschel-WS1415/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

bitte Rückseite beachten

Folgende Ableitungen und Funktionswerte könnten hilfreich sein ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in (0,\infty)$):

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sind die Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z = 0 \text{ und } 0 \leqq z \leqq 4\}$$

und das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x, y, z) = \left(x^3 z + z^2, \mathrm{e}^y, \frac{1}{4}x^4 - \sin(z)\right)^\top.$$

(a) Geben Sie eine Parametrisierung von S in Zylinderkoordinaten an.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche von S.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{div} g$ und $\mathrm{rot} g$.

(d) Bestimmen Sie den Betrag des Integrals

$$\left| \oint_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right|$$

wobei ∂S die Kreislinie $\{(x, y, 4) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$ ist.

Lösung:

(a) Wir führen Zylinderkoordinaten in der Form $(x, y, z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$ mit $r \geqq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$ ein. Die Bedingung $x^2 + y^2 - z = 0$ wird dann zu $z = r^2$ und schließlich wird $0 \leqq z \leqq 4$ zu $0 \leqq r \leqq 2$. Eine Parametrisierung von S ist damit gegeben durch

$$\Phi : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix}.$$

Alternative: Durch Auflösen von $r^2 = z$ nach r kommt man zur Parametrisierung

$$\tilde{\Phi} : [0, 4] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \tilde{\Phi}(z, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{z}\cos(\varphi) \\ \sqrt{z}\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

(b) Die Oberfläche von S ist gegeben durch das Integral $\iint_S 1\,\mathrm{d}O$. Zur Berechnung verwenden wir die konkrete Parametrisierung Φ aus Teilaufgabe **(a)**. Das Oberflächenelement wird dann zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}O = |\Phi_r \times \Phi_\varphi|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi &= \left|\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\\ 2r\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-r\sin(\varphi)\\ r\cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}\right|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \left|\begin{pmatrix}-2r^2\cos(\varphi)\\ -2r^2\sin(\varphi)\\ r\end{pmatrix}\right|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{4r^4+r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\
&= r\sqrt{4r^2+1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\iint_S 1\,\mathrm{d}O &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{4r^2+1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^2 r\sqrt{4r^2+1}\,\mathrm{d}r\\
&= 2\pi\left[\frac{1}{12}\sqrt{4r^2+1}^3\right]_{r=0}^2\\
&= \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{17}^3-1\right).
\end{aligned}$$

Alternative: Wir verwenden die Parametrisierung $\tilde{\Phi}$ aus Teilaufgabe **(a)**. Das Oberflächenelement wird dann zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}O = |\tilde{\Phi}_z \times \tilde{\Phi}_\varphi|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi &= \left|\begin{pmatrix}\frac{\cos(\varphi)}{2\sqrt{z}}\\ \frac{\sin(\varphi)}{2\sqrt{z}}\\ 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\sqrt{z}\sin(\varphi)\\ \sqrt{z}\cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}\right|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \left|\begin{pmatrix}-\sqrt{z}\cos(\varphi)\\ -\sqrt{z}\sin(\varphi)\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{z+\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\iint_S 1\,\mathrm{d}O &= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \sqrt{z+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^4 \sqrt{z+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\left[\frac{2}{3}\sqrt{z+\frac{1}{4}}^3\right]_0^4 = \frac{4}{3}\pi\left[\sqrt{\frac{17}{4}}^3 - \sqrt{\frac{1}{4}}^3\right] = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{17}^3-1\right).
\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\operatorname{div} g(x,y,z) = \partial_x(x^3z + z^2) + \partial_y(\mathrm{e}^y) + \partial_z\left(\frac{1}{4}x^4 - \sin(z)\right) = 3x^2z + \mathrm{e}^y - \cos(z).$$

Es ist

$$\operatorname{rot} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y\left(\frac{1}{4}x^4 - \sin(z)\right) - \partial_z(\mathrm{e}^y) \\ \partial_z(x^3z + z^2) - \partial_x\left(\frac{1}{4}x^4 - \sin(z)\right) \\ \partial_x(\mathrm{e}^y) - \partial_y(x^3z + z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Da ∂S die Randkurve von S ist, lässt sich nach dem Satz von Stokes das gesuchte Kurvenintegral in ein Oberflächenintegral über die Rotation von g umwandeln. Es ist also

$$\left|\oint_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right| = \left|\iint_S \operatorname{rot} g \cdot \mathrm{d}\vec{O}\right|$$

Verwenden wir wieder die Parametrisierung Φ aus Teil **(a)**, so wird das vektorielle Oberflächenelement zu

$$\mathrm{d}\vec{O} = \Phi_r \times \Phi_\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\varphi) \\ -2r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} g \cdot \mathrm{d}\vec{O} &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2r^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\varphi) \\ -2r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -4r^4\sin(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}_{=0} \cdot \int_0^2 -4r^4\,\mathrm{d}r \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alternative: Da ∂S die Randkurve von S ist, lässt sich nach dem Satz von Stokes das gesuchte Kurvenintegral in ein Oberflächenintegral über die Rotation von g umwandeln. Es ist also

$$\left|\oint_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right| = \left|\iint_S \operatorname{rot} g \cdot \mathrm{d}\vec{O}\right|$$

Verwenden wir wieder die Parametrisierung $\tilde{\Phi}$ aus Teil **(a)**, so wird das vektorielle Oberflächenelement zu

$$\mathrm{d}\vec{O} = \Phi_z \times \Phi_\varphi \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} -\sqrt{z}\cos(\varphi) \\ -\sqrt{z}\sin(\varphi) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} g \cdot \mathrm{d}\vec{O} &= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{z}\cos(\varphi) \\ -\sqrt{z}\sin(\varphi) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^4 -2\sqrt{z}^3 \sin(\varphi)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}_{=0} \cdot \int_0^4 -2\sqrt{z}^3\,\mathrm{d}z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Alternative:

Die Kreislinie ∂S ist die Randkurve der Kreisscheibe $D := \{(x, y, 4) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqq 4\}$. Eine Parametrisierung von D ist gegeben durch

$$\Psi : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Das vektorielle Oberflächenelement wird zu

$$\mathrm{d}\vec{O} = \Psi_r \times \Psi_\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Somit ist nach dem Satz von Stokes

$$\left|\oint_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right| = \left|\iint_D \operatorname{rot} g \cdot \mathrm{d}\vec{O}\right| = \left|\int_0^{2\pi}\int_0^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}}_{=0} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\right| = 0.$$

Alternative:

Die Kreislinie ∂S ist die Randkurve der Kreisscheibe $D := \{(x, y, 4) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leqq 4\}$. Ein Normalenvektor auf D ist gegeben durch $n = (0, 0, 1)^\top$ – man beachte, dass hier die Richtung, in die der Normalenvektor weist, wegen des Betrages unerheblich ist. Da die dritte Koordinate von $\operatorname{rot} g$ verschwindet, ist $\operatorname{rot} g \cdot n = 0$.

Damit ist nach dem Satz von Stokes

$$\left| \oint_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right| = \left| \iint_D \operatorname{rot} g \cdot \mathrm{d}\vec{O} \right| = \left| \iint_D \underbrace{\operatorname{rot} g \cdot n}_{=0} \,\mathrm{d}O \right| = 0.$$

Alternative:

Wir berechnen das Kurvenintegral direkt. Eine Parametrisierung von ∂S ist gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} g \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^{2\pi} g(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 32\cos^3(t) + 16 \\ \mathrm{e}^{2\sin(t)} \\ 4\cos^2(t) - \sin(4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \big(64\cos^3(t) \cdot (-\sin(t)) - 32\sin(t) + \mathrm{e}^{2\sin(t)} \cdot 2\cos(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \big[16\cos^4(t) + 32\cos(t) + \mathrm{e}^{2\sin(t)}\big]_0^{2\pi} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da alle Summanden der Stammfunktion 2π-periodisch sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems $y' = x + xy^2, \quad y(0) = 1$.

(b) Sei die Differentialgleichung $y'' + y' - 2y = 0$ gegeben.

i) Stellen Sie das zugehörige charakteristische Polynom auf und berechnen Sie dessen Nullstellen.

ii) Geben Sie ein Fundamentalsystem des Lösungsraums an.

iii) Bestimmen Sie diejenige Lösung mit $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

(c) Betrachten Sie nun die inhomogene Gleichung $y'' + y' - 2y = f(x)$.

i) Es sei nun $f(x) = \sin(x)$. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung. Geben Sie weiter die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung an, die für $x \to -\infty$ beschränkt bleibt.

ii) Geben Sie einen Ansatz zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung für $f(x) = -x^2\mathrm{e}^{-2x}$ an.

Lösung:

(a) Die Differentialgleichung ist separierbar. Daher erhalten wir durch Trennung der Veränderlichen

$$\begin{aligned}
& & y' &= x + xy^2 \\
&\Leftrightarrow & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x(1+y^2) \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= x\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow & \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow & \arctan(y) &= \frac{1}{2}x^2 + c \\
&\Leftrightarrow & y(x) &= \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right).
\end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ folgt $\tan(c) \overset{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, so dass die Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist durch

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

(b) i) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Die Nullstellen von χ sind $\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, also $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$.

ii) Nach Teil **(a)** ist ein Fundamentalsystem des Lösungsraums gegeben durch

$$\left\{ x \mapsto \mathrm{e}^x,\ x \mapsto \mathrm{e}^{-2x} \right\}.$$

iii) Die allgemeine Lösung und ihre Ableitung sind gegeben durch

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-2x},$$
$$y'(x) = c_1\mathrm{e}^x - 2c_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

Aus den Anfangsbedingungen $y(0) \overset{!}{=} 2$ und $y'(0) \overset{!}{=} -1$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 = 2,\ c_1 - 2c_2 = -1,$$

woraus sich nach leichter Rechnung ergibt, dass $c_1 = c_2 = 1$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x}.$$

(c) i) Es ist $\sin(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$, d.h. die Inhomogenität ist der Imaginärteil eines komplexen Quasipolynoms vom Grad 0 zum Exponenten i. Da der Exponent keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ ist, liegt keine Resonanz vor. Der (reelle) Ansatz zum Finden einer partikulären Lösung ist damit gegeben durch

$$y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Wir bestimmen die relevanten Ableitungen

$$y_p'(x) = b\cos(x) - a\sin(x),$$
$$y_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin(x) &\stackrel{!}{=} y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x)\\ &= -a\cos(x) - b\sin(x)\\ &\quad + b\cos(x) - a\sin(x)\\ &\quad - 2a\cos(x) - 2b\sin(x)]\\ &= (b-3a)\cos(x) + (-a-3b)\sin(x)\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich dann

$$\begin{aligned}0 &\stackrel{!}{=} (b-3a) \quad \Rightarrow \quad b = 3a,\\ 1 &\stackrel{!}{=} -a-3b = -10a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{10},\, b = -\frac{3}{10}.\end{aligned}$$

Damit ist eine partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_p(x) = -\frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x).$$

Die allgemeine homogene Lösung der inhomogenen Gleichung, die für $x \to -\infty$ beschränkt bleibt, ist

$$y(x) = c_1 e^x - \frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x).$$

ii) Es ist $-x^2 e^{-2x}$ ein Quasipolynom vom Grad 2 zum Exponenten -2. Da -2 eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt Resonanz vor. Der Ansatz von der Art der rechten Seite zum Finden einer partikulären Lösung lautet damit

$$y_p(x) = x(ax^2 + bx + c)e^{-2x}.$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Es ist auch jeder (ungeschicktere) Ansatz der Art der rechten Seite zulässig, der den obigen als Spezialfall enthält, also z.B.

$$y_p(x) = p(x)e^{-2x}$$

wobei $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, mit $n \geqq 3$, und a_3, a_2, a_1 als freie Parameter auftauchen.

Alternative Es ist auch der Ansatz für die Variation der Konstanten, gegeben durch

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-2x}$$

zulässig.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y$$

sowie diejenige Lösung mit $y(0) = (3, 0, 3)^\top$.

(b) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen sie e^{Ax} und e^{Bx} für $x \in \mathbb{R}$.

ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = By, \quad y(0) = (-2, 0, 1)^\top$.

Lösung:

(a) Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 4]. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = 1 - 2\mathrm{i}$. Wir bestimmen nun zugehörige Eigenvektoren v_j durch Lösen der homogenen linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_j I)v = 0$.

- Zu $\lambda_1 = -2$. Das zugehörige lineare Gleichungssystem ist gegeben durch
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 3 & -2 & | & 0 \\ -3 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$
Eine nichttriviale Lösung ist damit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Zu $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$. Das zugehörige lineare Gleichungssystem ist gegeben durch
$$\begin{pmatrix} -3-2\mathrm{i} & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & -2\mathrm{i} & -2 & | & 0 \\ -3 & 2 & -2\mathrm{i} & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$
Eine nichttriviale Lösung ist damit $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Da $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ und die Matrix reell ist, ist ein Eigenvektor v_3 gegeben durch
$$v_3 = \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ist gegeben durch
$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x} \right] + c_3 \mathrm{Im}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x} \right] \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x} \cos(2x) + \begin{pmatrix} 0 \\ -c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x} \sin(2x). \end{aligned}$$
Aus der Anfangsbedingung
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$
folgt umgehend, dass $c_1 = 3$ und $c_2 = c_3 = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also gegeben durch
$$y(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x}.$$

(b) i) Wir bestimmen zunächst die Potenzen von A. Es ist

$$A^0 = I, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^n = 0, \quad \text{für alle } n \geqq 3.$$

Damit ist

$$\mathrm{e}^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(Ax)^n = I + Ax + \frac{1}{2}A^2x^2 = \begin{pmatrix} 1 & -x & x - x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $B = 3I + A$. Da $3I \cdot A = A \cdot 3I$, gilt

$$\mathrm{e}^{Bx} = \mathrm{e}^{3Ix} \cdot \mathrm{e}^{Ax} = \mathrm{e}^{3x}I \cdot \mathrm{e}^{Ax} = \mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{Ax} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & -x\mathrm{e}^{3x} & (x - x^2)\mathrm{e}^{3x} \\ 0 & \mathrm{e}^{3x} & 2x\mathrm{e}^{3x} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

ii) Die Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch $y(x) = \mathrm{e}^{Bx}y(0)$. Im konkreten Fall führt dies auf

$$y(x) = \begin{pmatrix} (x - x^2 - 2)\mathrm{e}^{3x} \\ 2x\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

Alternative: Offensichtlich besitzt B nur den Eigenwert $\lambda = 3$. Dieser besitzt die algebraische Vielfachheit 3, aber nur die geometrische Vielfachheit 1. Wir bestimmen daher die Hauptvektoren erster, zweiter und dritter Stufe ($u, v, w \in \mathbb{R}^3$) durch Lösen der linearen Gleichungssysteme

$$(B - 3I)u \stackrel{!}{=} 0, \quad (B - 3I)v \stackrel{!}{=} u, \quad (B - 3I)w \stackrel{!}{=} v.$$

Mit $(B - 3I) = A$ ergeben sich zum Beispiel die Lösungen

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$y(x) = (c_1 + c_2x + \frac{1}{2}c_3x^2)\mathrm{e}^{3x}u + (c_2 + c_3x)\mathrm{e}^{3x}v + c_3\mathrm{e}^{3x}w.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = c_1 u + c_2 v + c_3 w \overset{!}{=} (-2, 0, 1)^\top$ ergibt sich dann $c_1 = -2$, $c_2 = 1$, $c_3 = -2$, so dass die Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist durch

$$y(x) = (-2 + x - x^2)e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - 2x)e^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2e^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass es sich hierbei um dieselbe Lösung wie oben handelt.

Alternative: Wir können das Differentialgleichungssystem zeilenweise von unten nach oben auflösen. Die letzte Zeile ist

$$y_3' = 3y_3 \quad \Rightarrow \quad y_3(x) = c_3 e^{3x}.$$

Mit der Anfangsbedingung $y_3(0) \overset{!}{=} 1$, ergibt sich $c_3 = 1$. Die so gefundene Lösung setzen wir in die zweite Zeile ein, so dass sich dort eine lineare inhomogene Gleichung ergibt, nämlich

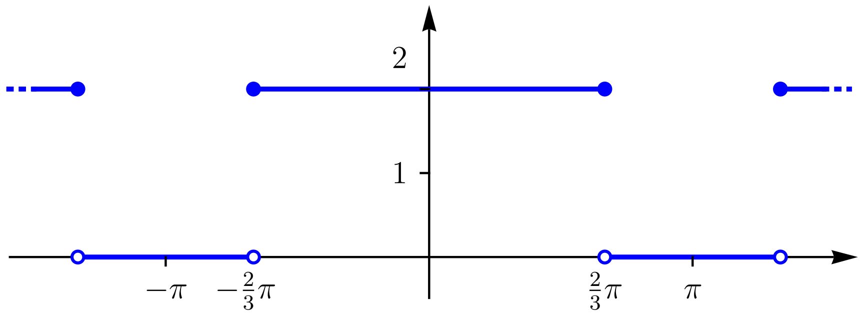
$$y_2' = 3y_2 + 2e^{3x} \quad \overset{\text{Variation der Konstanten}}{\Longrightarrow} \quad y_2(x) = c_2 e^{3x} + \int_0^x e^{3(x-y)} 2e^{3y}\,\mathrm{d}y = c_2 e^{3x} + 2xe^{3x}$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung $y_2(0) \overset{!}{=} 0$ ergibt sich $c_2 = 0$. Die erste Zeile des Differentialgleichungssystems wird damit zu

$$\begin{aligned} y_1' = 3y_1 - 2xe^{3x} + e^{3x} \quad \Longrightarrow \quad y_1(x) &= c_1 e^{3x} + \int_0^x e^{3(x-y)}(-2ye^{3y} + e^{3y})\,\mathrm{d}y \\ &= c_1 e^{3x} + e^{3x}(-x^2 + x). \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung $y_1(0) \overset{!}{=} -2$ liefert schließlich $c_1 = -2$.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze den folgenden Graphen.



(a) Welche Fourierkoeffizienten dieser Funktion sind auf jeden Fall 0?

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f sowohl in reeller als auch in komplexer Form.
Hinweis: Terme der Form $e^{\frac{2}{3}n\pi i}$ bzw. $\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$ müssen hier nicht weiter vereinfacht werden.

(c) In welchen Punkten konvergiert die Fourierreihe *nicht* gegen f?
Welche Werte hat sie stattdessen in diesen Punkten?

(d) Wie lautet die Parsevalsche Identität in diesem konkreten Fall?
Zu bestimmen ist also auch $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$.

(e) Berechnen Sie $\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$ für $n = 3k + \ell$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ und $\ell \in \{0, 1, 2\}$.
Hinweis: Das Ergebnis hängt nicht von k ab.

Lösung:

(a) Die Funktion f ist offensichtlich gerade, d.h. symmetrisch zur y-Achsen. Daher verschwinden die reellen Fourierkoeffizienten vor $\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ und die Fourierreihe von f ist eine reine Kosinusreihe.

(b)
- Wir berechnen zunächst die reellen Fourierkoeffizienten. Wie wir bereits aus Teil **(a)** wissen, verschwinden die Fourierkoeffizienten b_n vor $\sin(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Fourierreihe von f eine reine Kosinusreihe mit Koeffizienten a_n.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} 2 \cos(nx) \,\mathrm{d}x.$$

Für $n = 0$ erhalten wir damit $a_0 = \frac{8}{3}$. Falls $n \neq 0$, so ergibt sich

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{n} \sin(nx) \right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{4}{\pi n} \sin\left(\frac{2}{3} n\pi\right).$$

Damit ist die reelle Fourierreihe von f gegeben durch

$$f(x) \sim \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin\left(\frac{2}{3} n\pi\right) \cos(nx).$$

- Die komplexen Fourierkoeffizienten erhalten wir für $n \in \mathbb{N}_0$ aus den reellen Fourierkoeffizienten gemäß

  $$c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i} b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i} b_n).$$

  Damit ist

  $$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

  wobei

  $$c_k = \begin{cases} \frac{4}{3} & , \text{ falls } k = 0, \\ \frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{2}{3} k\pi\right) & , \text{ falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

(c) Die Fourierreihe von f konvergiert in den Sprungstellen $\pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht gegen die Funktion f. Die Fourierreihe konvergiert dort jeweils gegen den Mittelwert der links- und rechtsseitigen Limites von f, also gegen 1.

(d) Die Parsevalsche Identität lautet

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Im konkreten Fall wird dies zu

$$\frac{32}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 k^2} \sin^2\left(\frac{2}{3} k\pi\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} 4 \, \mathrm{d}x = \frac{16}{3}.$$

(e) Es ist

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2}{3}(3k+\ell)\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\ell + 2k\pi\right) &= \sin\left(\frac{2}{3}\ell\right) \\ &= \begin{cases} \sin(0) = 0 & , \text{ für } \ell = 0, \\ \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} & , \text{ für } \ell = 1, \\ \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} & , \text{ für } \ell = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Funktion $z \mapsto \overline{z}^2 + \overline{z}$ komplex differenzierbar ist.

(b) Für eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte $f(z) = 4$ für alle z mit $|z| = 2$. Bestimmen Sie $f(1)$.

(c) Berechnen Sie

$$\operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{2 + \mathrm{e}^{3z}}{(z-1)^3}, 1\right).$$

(d) Berechnen Sie

$$\oint_\gamma \frac{1}{z(z-2\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z,$$

wobei γ die entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie um i mit Radius $3/2$ ist.

(e) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=1000} \frac{1}{z(z-2\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z.$$

Lösung:

(a) Wir schreiben $z = x + \mathrm{i}y$ und erhalten dann, dass

$$\overline{z}^2 + \overline{z} = (x - \mathrm{i}y)^2 + x - \mathrm{i}y = x^2 - 2\mathrm{i}xy - y^2 + x - \mathrm{i}y = \underbrace{x^2 + x - y^2}_{=:u(x,y)} + \mathrm{i}\,\underbrace{(-2xy - y)}_{=:v(x,y)}.$$

Die Funktion ist genau dann in $z = x+\mathrm{i}y$ komplex differenzierbar, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten. Wir prüfen daher

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,y) = 2x + 1 &\overset{!}{=} \partial_y v(x,y) = -2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2},\\
\partial_y u(x,y) = -2y &\overset{!}{=} -\partial_x v(x,y) = -(-2y) \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.
\end{aligned}$$

Die Funktion ist also nur im Punkt $z = -\frac{1}{2}$ komplex differenzierbar.

Alternative: Etwas eleganter kann man auch mit dem Wirtingerkalkül vorgehen. Denn die Abbildung ist genau dann in z_0 differenzierbar, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\overline{z}^2 + \overline{z})|_{z=z_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\overline{z_0} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z_0} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = -\frac{1}{2}.$$

(b) Eine analytische Funktion, die die geforderten Bedingungen erfüllt, ist $f \equiv 4$. Da die Werte einer analytischen Funktion auf dem Rand eines Gebietes bereits die Werte im Innern eindeutig festlegen, kann die gesuchte Funktion auch keine andere als $f \equiv 4$ sein. Daher ist insbesondere $f(1) = 4$.

Alternative: Da 1 im Innern des Kreises um den Ursprung mit Radius 2 liegt, gilt nach der Cauchyschen Integralformel (CIF), dass

$$f(1) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=2} \frac{4}{z-1}\,\mathrm{d}z \overset{\text{CIF}}{=} 4,$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen verwendet haben, dass f nach Voraussetzung auf dem Integrationsweg konstant 4 ist.

(c) Die Funktion ist von der Form $\frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}$, mit $g(a) \neq 0$. Damit berechnet sich das Residuum gemäß der Formel

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, a\right) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}.$$

Im konkreten Fall ist dies

$$\operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{2+\mathrm{e}^{3z}}{(z-1)^3}, 1\right) = \left.\frac{9\mathrm{e}^{3z}}{2!}\right|_{z=1} = \frac{9}{2}\mathrm{e}^3.$$

(d) Im von γ umschlossenen Gebiet liegen lediglich die Nennernullstellen $z_1 = 0$ und $z_2 = 2\mathrm{i}$. Daher ist nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{1}{z(z-2\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z-2\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z-2\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}, 2\mathrm{i}\right)\right)\\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{-2\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} + \frac{1}{2\mathrm{i}\cdot 3\mathrm{i}}\right)\\ &= \frac{2}{3}\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(e) Der Kreis um den Ursprung mit Radius 1000 umschließt sämtliche Polstellen des Integranden. Wir müssen also zum Ergebnis aus Teilaufgabe **(d)** noch

$$2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z-2\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}, -\mathrm{i}\right) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{-\mathrm{i}\cdot(-3\mathrm{i})} = -\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}$$

addieren. Das Integral hat also den Wert 0 (unabhängig von der Durchlaufrichtung des Kreises).

Alternative: Der Kreis um den Ursprung mit Radius 1000 umschließt sämtliche Polstellen des Integranden. Da der Integrand eine rationale Funktion der Form p/q mit $\operatorname{Grad}(p) \leqq \operatorname{Grad}(q) - 2$ ist, ist die Summe der Residuen gleich Null (vgl. Vortragsübung 12, Aufgabe 35 **(b)**)

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Gegeben ist das Randwertproblem

$$u_{tt} = u_{xx} - 16u, \qquad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ gewöhnliche Differentialgleichungen für v und w.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine nichttriviale Lösung w, die die Randbedingungen erfüllt.

(c) Bestimmen Sie dazu die allgemeine Lösung v, die für alle t beschränkt bleibt.

(d) Geben Sie die allgemeine Lösung u des Randwertproblems an, die für alle t beschränkt bleibt.

(e) Bestimmen Sie diejenige Lösung u mit

$$u(0,x) = 4\cos(x),\ u_t(0,x) = 0, \qquad 0 \leqq x \leqq \pi.$$

Lösung:

(a) Setzen wir den Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$v''(t)w(x) = v(t)w''(x) - 16v(t)w(x) \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\frac{v''(t)}{v(t)}}_{\text{unabh. von } x} = \underbrace{\frac{w''(x)}{w(x)} - 16}_{\text{unabh. von } t} \equiv k \in \mathbb{R}.$$

Es ergeben sich somit die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} v''(t) - kv(t) &= 0, \\ w''(x) - (16+k)w(x) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung für w ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 - (16+k)$. Die Nullstellen sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{16+k}$. Die Struktur der allgemeinen Lösung ist damit abhängig vom Vorzeichen der Diskriminante.

- $k > -16$. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$w(x) = c_1 e^{\sqrt{16+k}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{16+k}\,x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Randbedingungen liefern in diesem Fall das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} w'(0) & \stackrel{!}{=} & 0, \\ w'(\pi) & \stackrel{!}{=} & 0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} c_1\sqrt{16+k} - c_2\sqrt{16+k} & = & 0, \\ c_1\sqrt{16+k}\mathrm{e}^{\sqrt{16+k}\,\pi} - c_2\sqrt{16+k}\mathrm{e}^{-\sqrt{16+k}\,\pi} & = & 0, \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Es gibt also in diesem Fall kein nichttriviales w, das die Randbedingung erfüllt.

- $k = -16$. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$w(x) = c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Randbedingungen liefern in diesem Fall sofort, dass $c_1 = 0$ und dass $c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann. Als allgemeine nichttriviale Lösung w, die die Randbedingungen erfüllt ergibt sich also

$$w(x) = c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- $k < -16$. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$w(x) = c_1 \cos(\sqrt{-16-k}\,x) + c_2 \sin(\sqrt{-16-k}\,x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Randbedingungen liefern in diesem Fall das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} w'(0) & \stackrel{!}{=} & 0, \\ w'(\pi) & \stackrel{!}{=} & 0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} c_2\sqrt{-16-k} & = & 0, \\ c_1\sqrt{-16-k}\sin(\sqrt{-16-k}\,\pi) + c_2\sqrt{-16-k}\cos(\sqrt{-16-k}\,\pi) & = & 0, \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = 0,\ c_1 \sin(\sqrt{-16-k}\,\pi) = 0.$$

Offensichtlich erhalten wir nur dann nichttriviale Lösungen, wenn $\sin(\sqrt{-16-k}\,\pi) = 0$, d.h. es muss gelten, dass $\sqrt{-16-k} \in \mathbb{N}$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $k = -16 - n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$w(x) = c_1 \cos(nx), \quad c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Wir machen wieder eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von k.

- $k > 0$. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$v(t) = c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{k}\,t} + c_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{k}\,t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Lösungen dieser Art sind offensichtlich nur dann für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt, wenn $c_1 = c_2 = 0$.

- $k = 0$. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$v(t) = c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Lösungen dieser Art sind nur dann für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt, wenn $c_1 = 0$.

- $k < 0$. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$v(t) = c_1 \cos(\sqrt{-k}\, t) + c_2 \sin(\sqrt{-k}\, t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Diese Lösungen sind für jede Wahl von c_1, c_2 für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt.

(d) Die allgemeine Lösung u ist dann eine Superposition aller vw, so dass w das Randwertproblem löst. Nach Teil **(b)** ist dann $k = -16 - n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, wobei w ein Vielfaches von $\cos(nx)$ ist. Insbesondere ist also $k < 0$. Damit kann v auch nur von der Form $v(t) = c_1 \cos(\sqrt{-k}\, t) + c_2 \sin(\sqrt{-k}\, t)$ sein.

(**Anmerkung:** Damit ist v automatisch für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt und die Forderung aus der Aufgabenstellung ist eigentlich überflüssig.)

Drücken wir nun k noch konsequent durch $n \in \mathbb{N}$ aus, so erhalten wir

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos(\sqrt{16+n^2}t) + \beta_n \sin(\sqrt{16+n^2}t)) \cos(nx),$$

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

(e) Damit die $u(t,x)$ aus Teil **(d)** die Anfangsbedingung erfüllt, muss gelten

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \overset{!}{=} 4\cos(x) \qquad \text{für alle } x \in [0,\pi].$$

Da Fourierkoeffizienten eindeutig sind, ergibt sich damit sofort $\alpha_1 = 4$ und $\alpha_n = 0$ für alle $n \neq 4$. Weiter muss gelten

$$u_t(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sqrt{16+n^2} \cos(nx) \overset{!}{=} 0,$$

so dass wir wie oben durch einen Koeffizientenvergleich schließen, dass $\beta_n = 0$ für $n \geqq 0$.

Also ist

$$u(t,x) = 4\cos(x)\cos(\sqrt{17}t).$$