Hinweis:

- Auf dieser Klausur können bis zu 80 Punkte erreicht werden.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden alle Aufgaben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich fünf eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.
- In den Aufgaben 1 bis 4 sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Für die Aufgaben 5 und 6 können die Tabellen auf dem ausgeteilten Beiblatt benutzt werden.
- In den Aufgaben 5 bis 6 werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden vorausssichtlich ab 10.04.2015 über das Online-Portal LSF bekanntgegeben. https://lsf.uni-stuttgart.de
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 14.04.2015 statt. Der genaue Termin wird auf der Homepage dieser HM3-Vorlesung bzw. auf der E-Learning Platform ILIAS bekanntgegeben. https://ilias3.uni-stuttgart.de

Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0. Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bei der Klausureinsicht oder bis zum 24.04.2015 bei Frau Maderer (Raum V57.7.346) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Eine Firma produziert genau zwei Typen von Glühbirnen, welche hier mit A bzw. B bezeichnet seien. Beide Typen sind identisch, haben jedoch unterschiedliche Lebenserwartungen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne vom Typ A mehr als 1000 Stunden brennt ist $0,9$. Für Typ B ist diese Wahrscheinlichkeit $0,3$. Ein Drittel aller produzierten Glühbirnen der Firma ist vom Typ A.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig ausgewählte Glühbirne dieser Firma mehr als 1000 Stunden brennt?

b) Angenommen, eine Birne dieser Firma glüht weniger als 1000 Stunden bis zum Defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Glühbirne vom Typ A ist?

c) Die Anzahl der Stunden, welche eine Glühbirne vom Typ A als Lebenserwartung besitzt, folgt einer Exponentialverteilung mit Parameter λ. Berechnen Sie diesen Parameter λ. (Es ist nicht nötig das Ergebnis in eine Dezimalzahl umzuwandeln.)

Lösung:

(a) Eine beliebige Birne werde gezogen. Mit T sei das Ereignis bezeichnet, bei dem die Birne mehr als 1000 Stunden brennt. A und B bezeichnen die Ereignisse, dass die Birne vom Typ A bzw. B ist. Es gelten folgende Werte für Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = 1 - P(A) = \frac{2}{3},$$

und für die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(T|A) = 0,9 \ , \qquad P(T|B) = 0,3.$$

Mit T die disjunkte Vereinigung von $T \cap A$ und $T \cap B$ erhalten wir

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap A) + P(T \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(T|A) + P(B) \cdot P(T|B) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0,9 + \frac{2}{3} \cdot 0,3 \\ &= 0,3 + 0,2 \ = \ 0,5 \end{aligned}$$

(b) Mit der Formel von Bayes erhalten wir

$$\begin{aligned} P(A|T) &= \frac{P(A) \cdot P(T|A)}{P(A) \cdot P(T|A) + P(B) \cdot P(T|B)} \\ &= \frac{1/3 \cdot 0,9}{0,5} \\ &= 3/5 = 0,6 \end{aligned}$$

(c) Es bezeichne $P(X \leq t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Birne vom Typ A nicht mehr als t Stunden brennt. Nach Angabe gilt

$$P(X \leq t) = Exp(\lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$$

für ein geeignetes $\lambda > 0$, da die Lebenserwartung exponentialverteilt ist.

Nun haben wir nach Voraussetzung $0,9 = P(X > 1000) = 1 - P(X \leq 1000) = 1 - 1 + e^{-1000\lambda}$, d.h. $0,9 = e^{-1000\lambda}$. Also $-1000\lambda = ln(0,9)$. Wir erhalten also

$$\lambda = \frac{-ln(0,9)}{1000}$$

Aufgabe 2 (17 Punkte)

Man berechne die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1 + 7x_2 + e^{4t} \\ x_2' &= -2x_1 - 4x_2 - e^{4t} \end{aligned} \quad .$$

b) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $X' = AX$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Man gebe auch explizit diejenige Lösung X_s an, welche die Anfangsbedingung $X_s(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ erfüllt!

Lösung:
(a) Das DGl-System ist von der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Man löst diese mittels einer linearen Transformation.

Das charakteristische Polynom der Systemmatrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 .$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{25/4} = -2$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{25/4} = 3$, d.h. Eigenwerte von A sind -2 und 3.

Eigenvektoren sind dann $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Transformationsmatrix ist also gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit $T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ haben wir das transformierte DGl-System

$$Z' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $Z = T^{-1}X$, die neue Unbekannte.

Dann ist $z_2 = c_2 e^{3t}$ und $z_1 = c_1\, e^{-2\,t} + \frac{1}{6} e^{4t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösung.

Rücktransformation ergibt dann

$$\begin{aligned} X &= TZ = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1\, e^{-2\,t} + \frac{1}{6} e^{4t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 7\, e^{3t} \\ -e^{-2t} & -2e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Mit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ haben wir das DGl-System

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_3 \\ x_2' &= -3x_2 \\ x_3' &= 2x_3 \end{aligned}$$

Daran kann/darf man direkt die Lösungen

$$\begin{aligned} x_2 &= c_2 e^{-3t}, \quad c_2 \in \mathbb{R}, \\ x_3 &= c_3 e^{2t}, \quad c_3 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

für die Komponenten x_2, x_3 ablesen. Nun setzt man die allgemeine Lösung x_3 in die Gleichung für x_1 ein:

$$x_1' = 2x_1 + c_3 e^{2t} \ .$$

Diese inhomogene Gleichung löst man mit dem Resonanzansatz

$$x_{1p} = ate^{2t}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $x_{1p}' = ae^{2t} + 2x_{1p}$.

Mit $a = c_3$ hat man also eine partikuläre Lösung gefunden. Die allgemeine Lösung für x_1 ist dann

$$x_1 = c_1 e^{2t} + c_3 te^{2t} \ , c_1 \in \mathbb{R}.$$

Wir haben also die allgemeine Lösung

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_3 te^{2t} \\ c_2 e^{-3t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Für die spezielle Lösung $X_s(t)$ müssen wir $c_1 = 1$, $c_2 = -4$ und $c_3 = -2$ wählen. Wir erhalten schließlich

$$X_s(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} \\ -4e^{-3t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix} \ .$$

Alternativer Lösungsweg zu Aufgabe 2b.

Das charakteristische Polynom der Systemmatrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda + 3);$$

Eigenwerte sind also 2 und -3.

Ohne zu rechnen darf man hier auch sofort erkennen, dass $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist, und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert -3 ist. Außerdem ist e_3 ein Hauptvektor zum Eigenwert 2, denn $(A - 2id)e_3 = e_1$ (auch ohne Rechnung).

Ein Fundamentalsystem des homogenen Differentialgleichungssytem $X' = AX$ ist dann

$$X_1(t) = e^{2t} e_1,$$

$$X_2(t) = e^{-3t} e_2,$$

zusammen mit

$$X_3(t) = e^{2t}(te_1 + e_3) = e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

denn e_3 ist kein Eigenvektor, aber ein Hauptvektor. Die allgemeine Lösung ist dann

$$X_{allg} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Bei $t = 0$ gilt für ein beliebiges Element der allgemeinen Lösung

$$X(0) = (c_1, c_2, c_3)^T .$$

Mit $c_1 = 1$, $c_2 = -4$ und $c_3 = -2$ ist also die spezielle Lösung X_s gefunden, welche die AWB erfüllt:

$$X_s(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} \\ -4e^{-3t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \pi & : \ x \in [-\pi, 0) \\ \pi - x & : \ x \in [0, \pi) \end{cases}$$

soll in eine Fourier-Reihe $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ entwickelt werden.

a) Man berechne die Koeffizienten a_0, a_n und b_n für $n \geq 1$.

b) Für welche $x \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die Fourier-Reihe S_f gegen die Funktion f? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Man bestimme die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$, indem man f an einer geeigneten Stelle x_o auswertet.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\pi \cdot \pi + \frac{1}{2}\pi \cdot \pi\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3\pi^2}{2} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos(nx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx \\
&= 0 - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)dx - \frac{1}{\pi}\, x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} - 0 \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\sin(nx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\frac{1}{n}\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\, x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\pi\cdot\frac{(-1)^n}{n} \\
&= \frac{(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

(b) f ist stückweise stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$.
Außerdem ist f stetig auf dem offenem Intervall $(-\pi,\pi)$. Die Reihe $S_f(x)$ konvergiert also gegen $f(x)$ für alle $x\in(-\pi,\pi)$. In $x=-\pi$ konvergiert die Reihe S_f jedoch nicht gegen f, denn dort ist die 2π-periodische Fortsetzung von f nicht stetig!
(c) Insbesondere gilt

$$\pi = f(0) = S_f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k-1)^2}\ .$$

Es folgt $\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$. Also

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Aufgabe 4 (17 Punkte)

Betrachten Sie den Vollkörper

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2rt\cos(s) + t^2 \\ rt\sin(s) \\ t^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{r} r \in [0,1] \\ t \in [0,1] \\ s \in [-\pi,\pi] \end{array} \right\}$$

mit der Deckfläche A in der Ebene $\{z = 1\}$ und der Mantelfläche B.

a) Parametrisieren Sie A und B und bestimmen Sie eine Flächennormale N von A bezüglich Ihrer gewählten Parametrisierung.

b) Zeigen Sie: Die Fläche von A ist 2π. Berechnen Sie nun das Kurvenintegral $\int_{\partial A} Y \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ mit $Y := \left(yz^2 + x^2, \quad yz, \quad xz + y^2\right)^\mathsf{T}$. Orientieren Sie dabei ∂A gegen den Uhrzeigersinn um die z-Achse. Welchen Integralsatz verwenden Sie?

c) Berechnen Sie das Volumenelement von V bezüglich der Koordinaten (r, s, t) und zeigen Sie $\int_V z \,\mathrm{dvol} \; = \frac{2}{3}\pi$.

d) Bestimmen Sie den Fluss von $F(x, y, z) := \left(z^2, \quad x + yz, \quad y\right)^\mathsf{T}$ durch die Oberfläche von V nach Innen.

e) Warum kann es kein Vektorfeld f mit $\operatorname{rot} f = F$ geben?

Lösung:

(a) Wir parametrisieren A durch

$$f(r,s) \quad := \quad \left(2\,r\,\cos(s) + 1, r\,\sin(s), 1\right)$$

mit $(r, s) \in [0,1] \times [-\pi, \pi]$.

Wir parametrisieren B durch

$$g(t,s) \quad = \quad \left(2\,t\,\cos(s) + t^2, t\,\sin(s), t^2\right)$$

mit $(t, s) \in [0,1] \times [-\pi, \pi]$.

Die Flächennormale an A ist

$$\begin{aligned} N &= \frac{\partial f}{\partial r} \times \frac{\partial f}{\partial s} \\ &= \begin{pmatrix} 2\,\cos(s) \\ \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\,r\sin(s) \\ r\,\cos(s) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\,r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Die Fläche von A ist

$$|A| \quad = \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 2\,r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = 2\,\pi\ .$$

Wir benutzen den Satz von Stokes. Demnach gilt

$$\int_{\partial A} Y \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A \operatorname{rot}(Y) \cdot \mathrm{d}\vec{O}\ .$$

Man berechnet

$$\operatorname{rot}(Y) = \big(y, (2\,y-1)z, -z^2\big)^{\intercal}$$

und mit der Flächennormale aus (a)

$$\int_A \operatorname{rot}(Y)\cdot \mathrm{d}\vec{O} = -\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \int 2\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = -2\,\pi\ .$$

(c) Das Volumenelement ist

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \begin{vmatrix} 2\,t\,\cos(s) & -2\,r\,t\,\sin(s) & 2\,r\,\cos(s)+2\,t \\ t\,\sin(s) & r\,t\,\cos(s) & r\,\sin(s) \\ 0 & 0 & 2\,t \end{vmatrix} = 2\,t(2\,r\,t^2\,\cos(s)^2\, + 2\,r\,t^2\,\sin^2(s)) = 4\,r\,t^3\ .$$

Mit $z(r,s,t) = t^2$ folgt

$$\int_V z\,\mathrm{dvol}\ = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1\int_0^1 4\,r\,t^5\mathrm{d}r\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi\ .$$

Alternativ, der Flächeninhalt einer Ellipse mit Halbachsen der Länge $2\,t$ bzw. t ist $2\,\pi\,t^2$. Mit $z = t^2$ folgt mit dem Cavalierischen Prinzip

$$\int_V z\,\mathrm{dvol}\ = 2\,\pi\int_0^1 z^2\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi\ :$$

(d) Man hat $\operatorname{div}(F) = z$. Mit dem Satz von Gauss folgt für den Fluss nach Innen

$$\int_{\partial V} F\cdot\mathrm{d}\vec{O} = -\int_V z\mathrm{dvol}\ = -\frac{2}{3}\pi;.$$

(e) Angenommen, es existiert ein Vektorfeld f mit $F = \operatorname{rot} f$. Dann folgt $\operatorname{div} F = \operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0$ da rot gefolgt von div immer Null ist. Da in unserem Fall $\operatorname{div} F$ nicht verschwindet, kann es kein solches f geben.

Name: | **Matrikel-Nr.:**

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Eine gezinkte Münze zeigt mit 60% Wahrscheinlichkeit Kopf. Die Münze wird 150 mal geworfen. Bezeichne X die Zufallsvariable, wieviele Würfe "Kopf" ergeben.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis $X = k$:

$$P(X = k) = \boxed{\binom{150}{k}(0.6)^k(0.4)^{150-k}}.$$

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

$$E(X) = \boxed{90}, \operatorname{Var}(X) = \boxed{36}$$

c) Sie wetten darauf, dass die Münze mehr als 80 mal Kopf zeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p gewinnen Sie diese Wette? Approximieren Sie durch eine geeignete Normalverteilung. Geben Sie das Ergebnis ohne zu runden an.

$$p = \boxed{95.15\%}$$

d) Bestimmen Sie das maximale $k_{\max}$ so, dass Ihre Gewinnchance bei einer Wette auf mindestens k mal Kopf bei über 90% liegt. Geben Sie zur Kontrolle den aus der Tabelle abgelesenen Wert b für die standardisierte Verteilung an.

$$b = \boxed{1.29}, k_{\max} = \boxed{82}$$

Aufgabe 6 (14 Punkte)

a) Geben Sie für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

das charakteristische Polynom an.

$$p(s) = \boxed{s^4 - 2\,s^2 + 1}$$

Bestimmen Sie die Nullstellen von $p(s)$ und deren Vielfachheit.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1$$

Wie lautet die allgemeine reelle Lösung obiger Differentialgleichung.

$$y(t) = a\,e^t + b\,t\,e^t + c\,e^{-t} + d\,t\,e^{-t} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

b) Finden Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(t) - y(t) = \cos(t).$$

$$y(t) = \frac{-1}{2}\cos(t)$$

c) Transformieren Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(3)}(t) - y(t) = \cos(3t)\mathrm{e}^{-2t}, \quad y''(0) = 1, y'(0) = 0, y(0) = 1$$

in den Bildbereich der Laplace-Transformation:

$$(s^3 - 1)\,y(s) - s^2 - 1 = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

d) Geben Sie eine Lösung für das folgende Anfangswertproblem an.

$$y' = 2x\left(1 + y^2\right), \quad y(1) = 0$$

$$y(x) = \tan(x^2 - 1)$$