Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 12.10.2015 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **13.10.2015** bis **16.10.2015** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f^{(k)}(x) \;=\; (-1)^k\,(x^2 - 2kx + (k-1)\,k)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

(b) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ besitzt der Graph von $f^{(k)}$ an der Stelle $x = 6$ eine waagrechte Tangente?

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{xy - x^2}{2x^2 - 2xy + y^2}\,.$$

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k)$ für die durch $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ definierte Folge.

(b) Ist f bei $(0,0)$ stetig fortsetzbar?

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Sei α ein reeller Parameter. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \alpha z & = & 1\,, \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 1\,, \\ \alpha x & + & y & + & z & = & -2\,. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems.

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = -2$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

(c) Für welche α ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar ?

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei E_4 die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Sei E_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

Sei $B\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_{E_4}f_{E_2}$ und ${}_{E_4}f_B$.

(b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 5 (*9 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1x_2 + 4x_1 + 2x_2 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik. Skizzieren Sie im Ausgangskoordinatensystem die Quadrik und ein Koordinatensystem, in dem $\mathcal{Q}$ diese Normalform besitzt.

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

(b) Ist f differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$?

(c) Ist f' differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$?

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) Für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 x_1^2 x_3 \\ 8x_3^2 \\ 3x_1^3 + b^4 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f.

(b) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt f ein Potential?

(c) Berechnen Sie ein Potential von f für $(a, b) = (3, 2)$.

(d) Gegeben sei die Parametrisierung der Kurve K durch

$$C : [1, 2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für $(a, b) = (3, 2)$ das Integral $\displaystyle\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}x$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

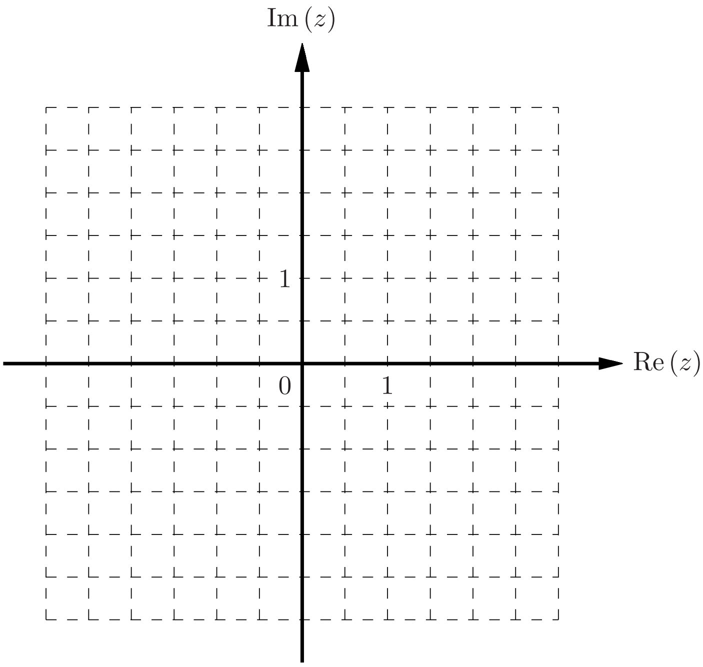
Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

(a) Es sei $w = 5\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}} - 3\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\pi\mathrm{i}}$. Berechnen Sie

$\mathrm{Re}(w) = \boxed{}$, $\mathrm{Im}(w) = \boxed{}$,

und zeichnen Sie w in die komplexe Zahlenebene ein.

(b) Skizzieren Sie die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \left|\mathrm{Im}\left(\frac{2}{z}\right)\right| > 1 \right\}$ in der komplexen Zahlenebene.



Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie für jede der folgenden komplexen Potenzreihen den Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ ihres Konvergenzkreises an:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} (3z)^n$, $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1-\mathrm{i})^n \, (z+\mathrm{i})^{2n}$, $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*7 Punkte*) Berechnen Sie:

$$\int \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}\ , \qquad \int_1^2 \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \mathrm{e}^{-x}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}\cos(\pi n) = \boxed{}$$

Aufgabe 11 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Matrizen A und B:

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante der Matrix A.

$$\mathrm{Sp}(A) = \boxed{}\ , \qquad \det(A) = \boxed{}\ .$$

Bestimmen Sie die Eigenräume der Matrix A:

$$\boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix B:

$$\chi_B(\lambda) = \boxed{}$$

Bestimmen Sie die Eigenräume der Matrix B:

$$\boxed{}$$
