Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Gegeben ist der Körper $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leqq 1, 1 \leqq z \leqq 3\}$. Berechnen Sie der Ausfluss von $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch den Rand ∂K mit

$$g(x, y, z) = (x^3, 2xy^2, z).$$

---

1. Variante

Da ∂K geschlossene Oberfläche, können wir den Satz von Gauss verwenden:

$$A(g, \partial K) = \iint_{\partial K} g \cdot n \, \mathrm{d}O = \iiint_K \mathrm{div} g \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Für die Divergenz erhalten wir

$$\mathrm{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = 3x^2 + 4xy + 1.$$

Damit folgt

$$A(g, \partial K) = \iiint_K \mathrm{div} g \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_K (3x^2 + 4xy + 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Die Fläche wird parametrisiert durch:

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [1, 3] \to \mathbb{R}^3 : (r, \theta, z) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos\theta \\ \frac{1}{2} r \sin\theta \\ z \end{pmatrix},$$

und wir erhalten:

$$J\Phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \frac{1}{2}\sin\theta & \frac{1}{2} r \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{det} J\Phi(r, \theta, z) = \frac{1}{2} r.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
A(g, \partial K) &= \iiint_K (3x^2 + 4xy + 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^3 (3r^2 \cos^2\theta + 2r^2 \cos\theta \sin\theta + 1) \cdot |\mathrm{det} J\Phi(r, \theta, z)| \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2(3r^2 \cos^2\theta + 2r^2 \cos\theta \sin\theta + 1) \cdot \frac{1}{2} r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r^3 \cos^2\theta + 2r^3 \cos\theta \sin\theta + r) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} 3r^3 (\cos 2\theta + 1) + r^3 \sin 2\theta + r \right] \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \left[3r^3 \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{2} r^3 \cos 2\theta + \frac{1}{2}(3r^3 + 2r)\theta \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \pi(3r^3 + 2r) \, \mathrm{d}r = \pi \left[\frac{3}{4} r^4 + r^2 \right]_0^1 = \frac{7}{4}\pi.
\end{aligned}$$

2. Variante

Wir können den Ausfluss direkt wie folgt berechnen:

$$A(g, \partial K) = \iint_{\partial K} g \cdot n \, \mathrm{d}O.$$

Die Randfläche ∂K von K können wir aufgrund der auftretenden Schnittkanten nicht stetig differenzierbar parametrisieren. Sie lässt sich aber offenbar in drei Komponenten aufteilen: Mantel M, Boden B und Deckel D mit

$$\begin{aligned} M &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 = 1, 1 \leqq z \leqq 3\}, \\ B &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leqq 1, z = 1\} \end{aligned}$$

und

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leqq 1, z = 3\}$$

für welche wir eine stetig differenzierbare Parametrisierung angeben können. Es gilt:

$$A(g, \partial K) = \iint_{\partial K} g \cdot n \, \mathrm{d}O = \iint_M g \cdot n \, \mathrm{d}O + \iint_B g \cdot n \, \mathrm{d}O + \iint_D g \cdot n \, \mathrm{d}O.$$

Mantel M: Eine Parametrisierung des Mantels erhalten wir durch

$$\Phi^M : [0, 2\pi] \times [1,3] \to \mathbb{R}^3 : (v, z) \mapsto \begin{pmatrix} \cos v \\ \frac{1}{2} \sin v \\ z \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\Phi_v^M = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \frac{1}{2} \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_z^M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_v^M \times \Phi_z^M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_M g \cdot n \, \mathrm{d}O &= \int_1^3 \int_0^{2\pi} g(\Phi^M(z,v)) \cdot (\Phi_v^M \times \Phi_z^M(z,v)) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}z \\ &= \int_1^3 \int_0^{2\pi} (\cos^3 v, \frac{1}{2} \cos v \sin^2 v, z)^\top \cdot (\frac{1}{2} \cos v, \sin v, 0)^\top \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}z \\ &= \int_1^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos^4 v + \frac{1}{2} \cos v \sin^3 v \right) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 v + \cos v \sin^3 v \right) \, \mathrm{d}v \end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 v \, \mathrm{d}v = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2v)^2 \, \mathrm{d}v = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2v + \frac{1}{2} \cos 4v \right) \, \mathrm{d}v = \frac{3\pi}{4},$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos v \sin^3 v \, \mathrm{d}v = \sin^4 v\Big|_0^{2\pi} - 3\int_0^{2\pi} \cos v \sin^3 v \, \mathrm{d}v.$$

Somit,

$$\int_0^{2\pi} \cos v \sin^3 v \, \mathrm{d}v = 0 \quad \text{und} \quad \iint_M g \cdot n \, \mathrm{d}O = \frac{3\pi}{4}.$$

Boden B**:** Durch $\Phi^B : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit:

$$\Phi^B(v, u) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ \frac{1}{2}u \sin v \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisieren wir den Boden B. Damit ist

$$\Phi_v^B = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ \frac{1}{2}u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_u^B = \begin{pmatrix} \cos v \\ \frac{1}{2}\sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_v^B \times \Phi_u^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}u \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_B g \cdot n \, \mathrm{d}O &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(\Phi^B(u, v)) \cdot (\Phi_v^B \times \Phi_u^B(u, v)) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (u^3 \cos^3 v, \frac{1}{2}u^3 \cos v \sin^2 v, 1)^\top \cdot (0, 0, -\frac{1}{2}u)^\top \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}u\right) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = -\pi \int_0^1 u \, \mathrm{d}u = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Deckel D**:** Ähnlich, durch $\Phi^D : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit:

$$\Phi^D(u, v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ \frac{1}{2}u \sin v \\ 3 \end{pmatrix}$$

parametrisieren wir den Deckel D. Damit ist

$$\Phi_u^D = \begin{pmatrix} \cos v \\ \frac{1}{2}\sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_v^D = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ \frac{1}{2}u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_u^D \times \Phi_v^D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}u \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_D g \cdot n \, \mathrm{d}O &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(\Phi^D(u, v)) \cdot (\Phi_u^D \times \Phi_v^D(u, v)) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (u^3 \cos^3 v, \frac{1}{2}u^3 \cos v \sin^2 v, 3)^\top \cdot (0, 0, \frac{1}{2}u)^\top \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}u\right) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = 3\pi \int_0^1 u \, \mathrm{d}u = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Damit,

$$A(g, \partial K) = \iint_M g \cdot n \, \mathrm{d}O + \iint_B g \cdot n \, \mathrm{d}O + \iint_D g \cdot n \, \mathrm{d}O = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}.$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{y'}{(\ln(x)+1)y} = 1, \qquad x > 1$$
$$y(2) = 5.$$

Variante 1: Behandlung als lineare Differentialgleichung

Hierfür müssen wir die DGL in die Form

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$$

bringen.

Dies kann man erreichen, indem man beide Seiten der Gleichung mit $(\ln(x)+1)y(x)$ multipliziert und dann alles auf eine Seite bringt:

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{(\ln(x)+1)y(x)} &= 1 \\ y'(x) &= (\ln(x)+1)y(x) \\ y'(x) + (-\ln(x)-1)y(x) &= 0. \end{aligned}$$

Es ist also $g(x) = -\ln(x) - 1$ und $h(x) = 0$

Bestimme eine Stammfunktion G von g:

$$\int (-\ln(x) - 1)\mathrm{d}x = -x\ln(x) + C_1.$$

Setze also $G(x) = -x\ln(x)$.

Die Lösungen der DGL lauten laut Satz 3.3.8

$$y = k(x)\mathrm{e}^{-G(x)} + C\mathrm{e}^{-G(x)},$$

wobei $k(x) = \int \mathrm{e}^{G(x)}h(x)\mathrm{d}x$ und $C \in \mathbb{R}$. Wegen $h(x) = 0$ ist auch $k(x) = 0$ und daher

$$y(x) = C\mathrm{e}^{x\ln(x)} = Cx^x.$$

Bestimme nun C so, dass $y(2) = 5$. Es muss also gelten

$$\begin{aligned} y(2) = C \cdot 2^2 = 4C &\overset{!}{=} 5 \\ C &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Die Lösung des AWP lautet also $y(x) = \frac{5}{4}x^x$.

Variante 2: Logarithmische Integration

Es gilt allgemein $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln(|f(x)|)$.

Forme die DGL wie folgt um:

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{(\ln(x)+1)y(x)} &= 1 \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= \ln(x)+1. \end{aligned}$$

Integration auf beiden Seiten liefert nun

$$\begin{aligned} \ln(|y(x)|) &= x\ln(x) + C \\ |y(x)| &= \mathrm{e}^{x\ln(x)+C} \\ |y(x)| &= x^x \mathrm{e}^C \\ y(x) &= \tilde{C} x^x, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die Konstante für die Lösung des AWPs berechnet sich wie in Variante 1.

Variante 3: Behandlung als Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Forme die DGL wie folgt um:

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{y(x)} &= \ln(x)+1 \\ \frac{dy}{y} &= (\ln(x)+1)dx. \end{aligned}$$

Integration auf beiden Seiten liefert nun

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int (\ln(x)+1)dx + C \\ \ln(|y(x)|) &= x\ln(x) + C \\ |y(x)| &= \mathrm{e}^{x\ln(x)+C} \\ |y(x)| &= x^x \mathrm{e}^C \\ y(x) &= \tilde{C} x^x, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die Konstante für die Lösung des AWPs berechnet sich wie in Variante 1.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Geben Sie alle reellen Lösungen folgender Differentialgleichung an

$$y'' + 9y = 36e^{3x} + 12\cos(3x).$$

Als erstes ist die homogene Gleichung zu lösen. Ihr charakteristisches Polynom lautet $\lambda^2 + 9$.

Es hat offenbar die Nullstellen $\pm 3i$.

Ein reelles Fundamentalsystem der Lösung der homogenen Gleichung lautet also $\cos(3x), \sin(3x)$.

Um die inhomogene Gleichung zu lösen, kann man nach dem Superpositionsprinzip für jeden Summanden der rechten Seite getrennt vorgehen.

Beim Summanden $36e^{3x}$ liegt keine Resonanz vor. Deshalb macht man den Ansatz $y_{p,1}(x) = ae^{3x}$. Es gilt offenbar $y''_{p,1}(x) = 9ae^{3x}$.

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 9ae^{3x} + 9ae^{3x} &= 36e^{3x} \\ 18a &= 36 \\ a &= 2, \end{aligned}$$

also $y_{p,1}(x) = 2e^{3x}$.

Beim Summanden $12\cos 3x$ liegt Resonanz vor. Hier macht man daher den Ansatz $y_{p,2}(x) = x(a\sin(3x) + b\cos(3x))$.

Es gilt

$$\begin{aligned} y'_{p,2}(x) &= (a\sin(3x) + b\cos(3x)) + x(3a\cos(3x) - 3b\sin(3x)) \\ y''_{p,2}(x) &= (3a\cos(3x) - 3b\sin(3x)) + (3a\cos(3x) - 3b\sin(3x)) + x(-9a\sin(3x) - 9b\cos(3x)) \\ &= 6a\cos(3x) - 6b\sin(3x) + x(-9a\sin(3x) - 9b\cos(3x)). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 6a\cos(3x) - 6b\sin(3x) + x(-9a\sin(3x) - 9b\cos(3x)) + 9x(a\sin(3x) + b\cos(3x)) &= 12\cos(3x) \\ 6a\cos(3x) - 6b\sin(3x) &= 12\cos(3x), \end{aligned}$$

also $a = 2$ und $b = 0$. Somit gilt $y_{p,2}(x) = 2x\sin(3x)$.

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun als Summe der Linearkombinationen des Fundamentalsystems und $y_{p,1}$, $y_{p,2}$, also

$$y = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + 2e^{3x} + 2x\sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = Ay \tag{1}$$

mit einem Parameter $\tau \geqq 0$ und einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix A an und bestimmen Sie die Eigenwerte sowie dazu gehörige Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie im Fall $\boldsymbol{\tau = 1}$ die Lösung des Problems zu den Anfangsbedingungen

i) $v_1 = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ii) $v_2 = y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Geben Sie mit den Ergebnissen aus (a) und (b) ein Fundamentalsystem des homogenen Problems an (für alle $\tau \geqq 0$).

(a) Wir berechnen also

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \tau - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\tau - \lambda)(1 - \lambda). \tag{2}$$

Damit sind offensichtlich τ und 1 Eigenwerte von A. Dies hätte man natürlich auch direkt sehen können, da bei einer oberen (oder auch unteren) Dreiecksmatrix die Eigenwerte schon auf der Diagonalen stehen und damit direkt das Polynom angeben können.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_0 = 1$ errechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} \tau - 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

und damit offensichtlich $(1-\tau)x_1 = x_2$. Also ist $w_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\tau \end{pmatrix}$ und jedes skalare Vielfache davon ein Eigenvektor.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = \tau$ errechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

und damit offensichtlich $x_2 = 0$. Also ist $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und jedes skalare Vielfache davon ein Eigenvektor.

Bemerkung: Offensichtlich fallen für den Fall $\tau = 1$ die beiden Eigenvektoren zusammen. Das heißt, in diesem Fall ist die Matrix nicht diagonalisierbar und hat den Eigenwert $\lambda = 1$ zweifach.

(b) i) Man sieht entweder direkt, dass es sich gerade um den obigen Eigenvektor zum Eigenwert $\tau = 1$ handelt und weiß dann aus der Vorlesung, dass die Lösung damit

$$f_1(x) = v_1 e^{\tau x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x \tag{5}$$

ist.

ii) Dies ist offensichtlich kein Eigenvektor mehr und für $\tau = 1$ gibt es auch keine Basis aus Eigenvektoren (der vorher zweite Eigenvektor fällt für $\tau = 1$ mit dem ersten zusammen). Also wenden wir den üblichen Algorithmus aus der Vorlesung an und berechnen

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

(weitere Rechnungen sind unnötig, da diese linear unabhängig sind und im $\mathbb{R}^2$ damit eine Basis bilden, also jeder weitere Vektor linear abhängig sein muss). Als Polynom $q(A)$ benützen wir das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$ (wenn man $A^2 v_2 = (2, 1)^T$ berechnet und damit eine nicht triviale Linearkombination der 0 erstellen möchte, bekommt man dasselbe Ergebnis, da $A^2 v_2 - 2Av_2 + v_2 = (A^2 - 2A + 1)v_2 = 0$ gilt).
Die 2. Ordnungsgleichung, die dazugehört, ist dann

$$y'' - 2y' + 1 = 0 \tag{7}$$

und das Polynom $(1 - \nu)^2 = \nu^2 - 2\nu + 1$ hat die Nullstellen $\nu_{0,1} = 1$. Damit ist das Fundemantalsystem der 2. Ordnungsgleichung gegeben durch

$$\{e^x, xe^x\}. \tag{8}$$

Die Wronksi-Matrix in $x_0 = 0$ der 2. Ordnungsgleichung ist

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

und die Transponierte der Inversen berechnet sich zu (z.B. Cramersche Regel oder direkt oder man sieht es)

$$(M(0)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Dann bekommt man die Lösung als

$$f_2(x) = (v_2|Av_2)(M(0)^{-1})^T \begin{pmatrix} e^x \\ xe^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ xe^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ xe^x \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} xe^x = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^x. \tag{12}$$

(c) Wir stellen fest, dass wir in Teil (a) für alle $\tau \neq 1$ eine Basis aus Eigenvektoren gefunden haben, also ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\tau x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\tau \end{pmatrix} e^{x} \right\}, \text{ für } \tau \neq 1. \tag{13}$$

Im Fall $\tau = 1$ haben wir in Teil (b) zum Startwert $x_0 = 0$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ gehabt (nämlich die Anfangswerte). Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten dann zu jedem Wert x eine Basis des $\mathbb{R}^2$ sind, also ein Fundamentalsystem. Also ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{x}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} \right\}, \text{ für } \tau = 1 \tag{14}$$

ein Fundamentalsystem.

Natürlich ist auch jede Linearkombination davon wieder ein Fundamentalsystem.

Alternativ könnte man im Fall $\tau = 1$ auch f_2, f_2' wählen, da v_2, Av_2 linear unabhängig sind. Damit ergibt sich das Fundamentalsystem

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}, \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} \right\}, \text{ für } \tau = 1 \tag{15}$$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Es ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ oder } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

gegeben.

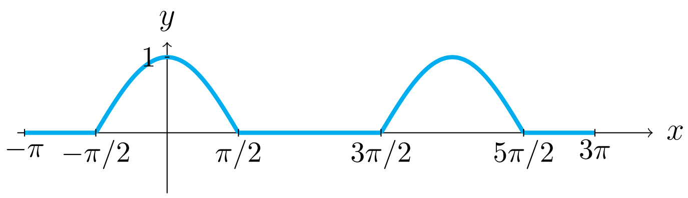
(a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi)$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(c) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe an diesen Stellen jeweils?

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

(a) 

(b) (1) Weil $f(x)$ gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Die Koeffizienten a_n für f folgen durch einfache Integration sofort:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}.$$

und für $n \geqq 2$

$$
\begin{aligned}
a_n =&\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos((n+1)x)+\cos((n-1)x)]dx = \\
=&\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1}+\frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
=&\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\frac{(n+1)\pi}{2})}{n+1}+\frac{\sin(\frac{(n-1)\pi}{2})}{n-1}\right] \\
=&\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n+1}-\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n-1}\right] \\
=&-\frac{2}{\pi}\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2-1} \\
=&\begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k)^2-1}, & n=2k \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{\pi-4\pi k^2}\cos(2kx).$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $\left(\frac{(2k-1)\pi}{2},\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $\mathbb{R}$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.