Klausur zur Höheren Mathematik III

für die Fachrichtungen: kyb, mecha, phys

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel: 10 DIN A4 Seiten eigenhändig handbeschrieben**. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle 6 Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **01. Oktober 2015** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **01. Oktober 2015** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM III–Pöschel (`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Poeschel-WS1415/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

bitte Rückseite beachten

Folgende Ableitungen und Funktionswerte könnten hilfreich sein ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in (0, \infty)$):

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie

$$\iint_{\{x^2+y^2\leqq 1\}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y)$$

durch Einführen von Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

indem Sie die Integrationsreihenfolge geeignet vertauschen.

(c) Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x,y,z) = (3z, z\cos(yz), 3x + y\cos(yz))^\top.$$

Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$ sowie das Wegintegral

$$\oint_\gamma g \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

wobei γ die Randlinie des Einheitskreises in der Ebene mit $z = 0$ ist.

(d) Es sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$h(x,y,z) = \left(\frac{1}{y^2+z^2+1} - 2x, y + x^3z^5, x^3 - z\right)^\top.$$

Berechnen Sie $\operatorname{div} h$ sowie das Oberflächenintegral

$$\iint_S h \cdot \mathrm{d}\vec{O},$$

wobei S die Oberfläche der Einheitskugel ist.

Lösung:

(a) Mit Polarkoordinaten $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ haben wir

$$\iint_{\{x^2+y^2\leqq 1\}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sin(r^2)\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\cos(r^2)\right]_{r=0}^1 = \pi(1-\cos(1))$$

(b) Es ist leicht zu sehen (zum Beispiel durch eine Skizze), dass das Integrationsgebiet B ein Normalbereich sowohl bezüglich der y-Achsen als auch der x-Achsen ist. Wir haben

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqq y \leqq 1,\ \sqrt{y} \leqq x \leqq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^2\}.$$

Damit ist

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^3} x^2\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x^3}\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-1}).$$

(c) Es ist

$$\operatorname{rot} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y(3x + y\cos(yz)) - \partial_z(z\cos(yz)) \\ \partial_z(3z) - \partial_x(3x + y\cos(yz)) \\ \partial_x(z\cos(yz)) - \partial_y(3z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\oint_\gamma g \cdot \mathrm{d}\vec{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_{\{x^2+y^2\leqq 1, z=0\}} \operatorname{rot} g \cdot \mathrm{d}\vec{O} = 0.$$

(d) Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} h(x,y,z) &= \partial_x\left(\frac{1}{y^2+z^2+1} - 2x\right) + \partial_y(y + x^3z^5) + \partial_z(x^3 - z) \\ &= -2 + 1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

Es war keine Orientierung des Normalenvektors angegeben, daher ist nur der Betrag des Oberflächenintegrals eindeutig. Nehmen wir an, dass der Normalenvektor vom Ursprung wegzeigt, so ist

$$\iint_S h \cdot \mathrm{d}\vec{O} \overset{\text{Gauß}}{=} \iiint_{B_1(0)} \operatorname{div} h\,\mathrm{d}V = -2 \cdot [\text{Volumen der Einheitskugel}] = -2 \cdot \frac{4}{3}\pi = -\frac{8}{3}\pi.$$

Das Ergebnis $\frac{8}{3}\pi$ ist genauso richtig, wenn die andere Orientierung verwendet wurde.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ von

$$y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \sin(x)y^2, \quad y(0) = -1,$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung an.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden homogenen Differentialgleichung in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.

$$y'' - 6y' + \alpha y = 0.$$

(d) Geben Sie jeweils eine partikuläre Lösung für $y'' - 6y' - 7y = f(x)$ an, wenn

i) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, ii) $f(x) = 25\cos(x)$, iii) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 25\cos(x)$.

Hinweis: Auf der Rückseite des Deckblattes befindet sich eine Tabelle mit elementaren Stammfunktionen und Ableitungen sowie speziellen Werten der trigonometrischen Funktionen.

Lösung:

(a) Es handelt sich hierbei um eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Diese können wir mit Hilfe der Variation der Konstanten lösen. Zunächst bestimmen wir die homogene Lösung y_h von $y' = \frac{1}{x}y$. Daraus ergibt sich

$$y_h(x) = C\mathrm{e}^{\ln|x|} = C|x| \overset{x\geq 0}{=} Cx$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Für eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems machen wir nun den Ansatz $y_p(x) = C(x)y_h(x)$, so dass wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten, dass

$$C'(x)x + C(x) \overset{!}{=} C(x) + \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad \text{z.B. } C(x) = -\frac{1}{2x^2}.$$

Damit haben wir als partikuläre Lösung $y_p(x) = -\frac{1}{2x}$. Die allgemeine Lösung y ist dann

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cx - \frac{1}{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Dies ist eine separierbare Gleichung. Nach formaler Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y^2} &= \sin(x) \\
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
-\frac{1}{y} &= -\cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = -1$ ergibt dann

$$1 \stackrel{!}{=} -1 + c,$$

so dass $c = 2$. Die gesuchte Lösung ist dann gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x) - 2}.$$

Da $|\cos(x)| \leqq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, existiert die Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Das charakteristische Polynom der Gleichung ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + \alpha$. Die Nullstellen von p sind

$$\lambda_{\alpha,\pm} = 3 \pm \sqrt{9-\alpha}.$$

Je nachdem, welches Vorzeichen die Diskriminante $9 - \alpha$ besitzt, hat die zugehörige Lösung der Differentialgleichung eine andere Struktur:

- $\alpha < 9$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_{\alpha,+} x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_{\alpha,-} x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- $\alpha = 9$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} + c_2 x \mathrm{e}^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- $\alpha > 9$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} \cos(\sqrt{\alpha - 9}x) + c_2 \mathrm{e}^{3x} \sin(\sqrt{\alpha - 9}x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Die homogene Gleichung ist gerade von der Form wie in **(c)** mit $\alpha = -7$. Damit sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gegeben durch $\lambda_+ = 7$ und $\lambda_- = -1$.

i) Da -1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt Resonanz vor und wir machen den folgenden Ansatz für eine partikuläre Lösung: $y_{p,1}(x) = cx\mathrm{e}^{-x}$. Wir berechnen zunächst die relevanten Ableitungen:

$$y'_{p,1}(x) = c\mathrm{e}^{-x}(1-x),$$
$$y''_{p,1}(x) = c\mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$c\mathrm{e}^{-x}(x-2) - 6c(1-x)\mathrm{e}^{-x} - 7cx\mathrm{e}^{-x} \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{-x} \quad \Longleftrightarrow \quad -2c - 6c = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad c = -\frac{1}{8}.$$

Damit ist eine partikuläre Lösung $y_{p,1} = -\frac{1}{8}x\mathrm{e}^{-x}$.

ii) Da i keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt keine Resonanz vor. Wir machen den Ansatz $y_{p,2} = A\cos(x) + B\sin(x)$. Wir berechnen wieder die relevanten Ableitungen:

$$y'_{p,2}(x) = -A\sin(x) + B\cos(x),$$
$$y''_{p,2}(x) = -A\cos(x) - B\sin(x) = -y_p(x).$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} & -8y_{p,2}(x) - 6y'_{p,2}(x) \stackrel{!}{=} 25\cos(x) \\ \Leftrightarrow \quad & (-8A - 6B)\cos(x) + (-8B + 6A)\sin(x) = 25\cos(x) \\ \Leftrightarrow \quad & A = \frac{4}{3}B,\ B = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist eine partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_{p,2}(x) = -2\cos(x) - \frac{3}{2}\sin(x).$$

iii) Die Inhomogenität ist gerade die Summe der Inhomogenitäten aus den Teilaufgaben i) und ii). Damit ist aber auch eine partikuläre Lösung $y_{p,3}$ gegeben durch

$$y_{p,3}(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = -\frac{1}{8}x\mathrm{e}^{-x} - 2\cos(x) - \frac{3}{2}\sin(x).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} y$$

sowie diejenige Lösung mit $y(0) = (1, 1, 1)^\top$.

(b) Ein komplexes Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}, \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})x} \right\}.$$

Geben Sie ein zugehöriges reelles Fundamentalsystem an (in der Darstellung soll die imaginäre Einheit nicht mehr auftauchen).

(c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Weiterhin seien zwei Lösungen y_1, y_2 des zugehörigen linearen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ bekannt. Geben Sie die Eigenwerte von A (mit Vielfachheit) an, wenn

i) $y_1(x) = (17, 4, 1)^\top \mathrm{e}^{-7x}, \quad y_2(x) = (0, \sin(3x), \cos(3x))^\top \mathrm{e}^{2x}$,

ii) $y_1(x) = (1, 0, -1)^\top, \quad y_2(x) = (0, 1, 1)x\mathrm{e}^{-4x}$.

Lösung:

(a) Die Eigenwerte der Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 6 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\cdot[(1-\lambda)(2-\lambda)-6] = (-1-\lambda)[\lambda^2 - 3\lambda - 4]. \end{aligned}$$

Eine Nullstelle ergibt sich sofort, nämlich $\lambda_1 = -1$. Weiter ergeben sich aus $\lambda^2 - 3\lambda - 4 \stackrel{!}{=} 0$ die zwei Nullstellen $\lambda_{2/3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}$, so dass $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = -1 = \lambda_1$. Wir bestimmen nun zugehörige Eigenvektoren (und gegebenenfalls Nebenvektoren):

- $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$. Dann sind Eigenvektoren nichttriviale Lösungen des homogenen LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

so dass wir einen zweidimensionalen Eigenraum haben (der Eigenwert -1 hat also sowohl geometrische als auch algebraische Vielfachheit 2, es treten keine Jordanblöcke auf). Linear unabhängige Lösungen des obigen homogenen LGS sind zum Beispiel

$$v_1 = (1,0,0)^\top \quad \text{und} \quad v_3 = (0,-3,2)^\top.$$

- $\lambda_2 = 4$. Dies führt auf das homogene LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ein Eigenvektor ist dann $v_2 = (2,1,1)^\top$.

Die allgemeine Lösung y ist dann gegeben durch

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Zum Anpassen an die Anfangsbedingung müssen wir das folgende inhomogene LGS lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

woraus sich umgehend $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ und $c_1 = -1$ ergibt, also

$$y(x) = (2\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{4x}, \mathrm{e}^{4x})^\top.$$

(b) Ein reelles Fundamentalsystem ist gegeben durch

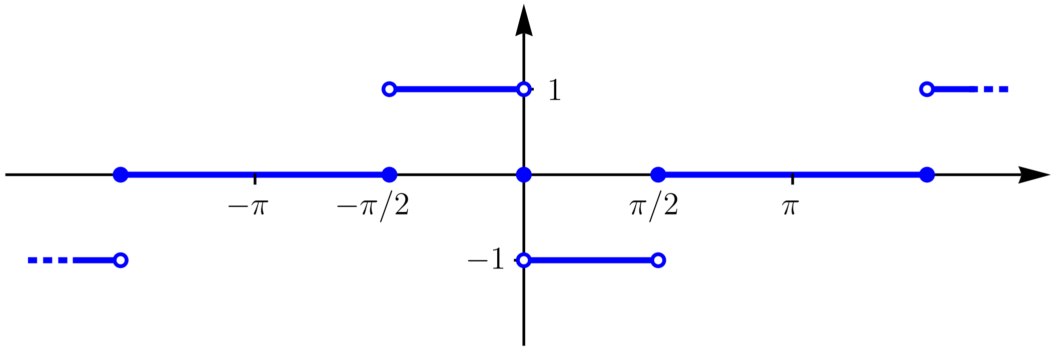
$$\left\{ \mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\right], \mathrm{Im}\left[\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\right] \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} \mathrm{e}^x, \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \mathrm{e}^x \right\}.$$

(c) i) Es lässt sich aus der Struktur der Lösungen ablesen, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 = -7$ und $\lambda_2 = 2+3\mathrm{i}$ besitzen muss. Da A reell ist, treten echt komplexe Eigenwerte nur als komplex konjugierte Paare auf, d.h. $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = 2 - 3\mathrm{i}$. Alle Eigenwerte sind einfach.

ii) Die Lösung y_1 ist konstant, d.h. wir haben eine Eigenwert $\lambda_1 = 0$. Der Vorfaktor x bei y_2 besagt, dass wir einen Jordanblock zum Eigenwert $\lambda_2 = -4$ haben müssen. Daher ist -4 ein doppelter Eigenwert.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze den folgenden Graphen.



i) Welche Fourierkoeffizienten dieser Funktion sind auf jeden Fall 0?
Begründen Sie Ihre Antwort.

ii) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f sowohl in reeller als auch in komplexer Form.

iii) In welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe *nicht* gegen $f(x)$?
Welche Werte hat sie stattdessen in diesen Punkten?

(b) Geben Sie die reellen und komplexen Fourierkoeffizienten der folgenden 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an:

i) $f(x) = \sin(5x) + 3\cos(5x)$ ii) $f(x) = \sin^2(3x) - \frac{1}{2}$

Hinweis: Teilaufgabe **(b)** kann gelöst werden, ohne eine einzige Integration durchzuführen. Die Formeln $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ und $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ könnten dabei hilfreich sein.

Lösung:

(a) i) Die Funktion f ist ungerade, d.h. es verschwinden in der reellen Fourierreihe die Koeffizienten vor den Kosinustermen, oder kurz: $\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \,:\, a_n = 0$.

ii) Die reellen Fourierkoeffizienten b_n, $n \in \mathbb{N}$ sind gegeben durch

$$b_n = = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \sin(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin(nx)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{x=0}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi n}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten berechnen sich zu

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = 0, \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n) = \frac{\mathrm{i}}{\pi n}\left[1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n) = -\frac{\mathrm{i}}{\pi n}\left[1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right], \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

iii) In allen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$, in denen f stetig ist, konvergiert die Fourierreihe F von f gegen $f(x)$. In den Unstetigkeitsstellen $-\pi/2$, 0, $\pi/2$ gilt

$$\begin{aligned} F(-\pi/2) &= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\nearrow -\pi/2} f(x) + \lim_{x\searrow -\pi/2} f(x)\right] = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2} && \neq f(-\pi/2) = 0, \\ F(0) &= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\nearrow 0} f(x) + \lim_{x\searrow 0} f(x)\right] = \frac{1}{2}[1+(-1)] = 0 && = f(0), \\ F(\pi/2) &= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\nearrow \pi/2} f(x) + \lim_{x\searrow \pi/2} f(x)\right] = \frac{1}{2}[-1+0] = -\frac{1}{2} && \neq f(\pi/2) = 0. \end{aligned}$$

Es liegt also keine Konvergenz in den Punkten $\pm\pi/2$ vor, die angenommenen Werte sind $\mp 1/2$.

(b) i) Die Funktion f ist bereits in Form einer reellen Fourierreihe geschrieben. Die Koeffizienten sind dann $a_5 = 3$ und $b_5 = 1$. Alle übrigen reellen Fourierkoeffizienten verschwinden. Die zugehörigen komplexen Fourierkoeffizienten sind

$$c_5 = \frac{1}{2}(3 - \mathrm{i}),\ c_{-5} = \frac{1}{2}(3 + \mathrm{i}),$$

alle übrigen komplexen Fourierkoeffizienten verschwinden.

ii) Mit den angegebenen Formeln kann f in die Form einer komplexen und schließlich wieder reellen Fourierreihe gebracht werden:

$$f(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos(6x).$$

Daraus ergibt sich

$$c_6 = c_{-6} = -\frac{1}{4}, \qquad a_6 = -\frac{1}{2}.$$

Alle anderen Fourierkoeffizienten sind gleich Null.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Die analytische Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$f(x + \mathrm{i}y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Schreiben Sie $f = f(z)$ in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d.h. ohne Verwendung von x, y oder $\overline{z}$.

(b) Für eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$. Welchen Wert nimmt f an der Stelle 1 an? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = x^2 + ay^2 - 2ax + 3y$, $a \in \mathbb{R}$ sei Realteil einer analytischen Funktion. Welchen Wert muss a annehmen?

(d) Berechnen Sie

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^3 + \mathrm{e}^{-z}}{(z-2)^4}, 2\right).$$

(e) Berechnen Sie

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z^4 + 9)(z - \mathrm{i})z}\,\mathrm{d}z,$$

wobei γ die einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Randlinie des Kreises um den Ursprung mit Radius $3/2$ ist.

Lösung:

(a) Mit $z = x + \mathrm{i}y$ ergibt sich

$$f(x + \mathrm{i}y) = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{\overline{z} \cdot z} = \frac{1}{z} = f(z).$$

(b) Da f im Unendlichen verschwindet und auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch und somit stetig ist, ist f beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist f damit konstant. Die einzige konstante Funktion, die im Unendlichen verschwindet, ist aber die Nullfunktion, so dass $f(1) = 0$.

(c) Wenn u Realteil einer analytischen Funktion ist, so muss notwendigerweise $\Delta u = 2 + 2a \overset{!}{=} 0$ gelten. Damit muss $a = -1$ sein.

(d) Die Funktion ist von der Form $\frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}$, mit $g(a) \neq 0$. Damit berechnet sich das Residuum gemäß der Formel

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}, a\right) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}.$$

Im konkreten Fall ist dies

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^3 + \mathrm{e}^{-z}}{(z-2)^4}, 2\right) = \left.\frac{6 - \mathrm{e}^{-z}}{3!}\right|_{z=2} = 1 - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}.$$

(e) Im von γ umschlossenen Gebiet liegen lediglich die Nennernullstellen $z_1 = 0,\ z_2 = \mathrm{i}$, denn die Lösungen von $z^4 = -9$ haben alle Betrag $\sqrt{3} > 3/2$. Daher ist nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{1}{(z^4+9)(z-\mathrm{i})z}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^4+9)(z-\mathrm{i})z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^4+9)(z-\mathrm{i})z}, 0\right)\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{9\cdot(-\mathrm{i})} + \frac{1}{(1+9)\cdot\mathrm{i}}\right) = -\frac{\pi}{45}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lösung der Transportgleichung $u_t = 3u_x$ und erfülle $u(0, x) = x$. Bestimmen Sie $u(2, x)$.

(b) Gegeben ist das Randwertproblem

$$u_t = u_{xx} - u, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$$

i) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ gewöhnliche Differentialgleichungen für v und w.

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung w, die die Randbedingungen erfüllt.

iii) Geben Sie die allgemeine Lösung u des Randwertproblems an.

iv) Bestimmen Sie diejenige Lösung u mit

$$u(0, x) = \sin(x) + 3\sin(5x), \quad 0 \leqq x \leqq \pi.$$

Lösung:

(a) Die allgemeine Lösung der Transportgleichung $u_t = cu_x$ besitzt die Form $u(t, x) = f(x + ct)$ mit einer einmal differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen der Anfangsbedingung haben wir

$$x \overset{!}{=} u(0, x) = f(x),$$

so dass $u(t, x) = x + 3t$ und speziell $u(2, x) = x + 6$.

(b) i) Mit dem Separationsansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ erhalten wir

$$v'(t)w(x) = v(t)w''(x) - v(t)w(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} - 1 \overset{!}{=} K \in \mathbb{R}.$$

ii) Abhängig vom Parameter K erhalten wir die folgenden allgemeinen Lösungen für w:

- $K > -1$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$w(x) = c_1 e^{\sqrt{K+1}x} + c_2 e^{-\sqrt{K+1}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

  Anpassen an die Randbedingungen liefert

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} w(0) = c_1 + c_2, && \Rightarrow \quad c_1 = -c_2, \\ 0 &\overset{!}{=} w(\pi) = c_2(-e^{\sqrt{K+1}\pi} + e^{-\sqrt{K+1}\pi}) && \Rightarrow \quad c_2 = 0. \end{aligned}$$

  Für $K > -1$ gibt es also nur die triviale Lösung für das Randwertproblem.

- $K = -1$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$w(x) = c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

  Anpassen an die Randbedingungen liefert sofort $c_1 = c_2 = 0$, so dass auch in diesem Fall nur die triviale Lösung existiert.

- $K < -1$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$w(x) = c_1 \cos(\sqrt{-(K+1)}x) + c_2 \sin(\sqrt{-(K+1)}x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Anpassen an die Randbedingungen liefert

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} w(0) = c_1 && \Rightarrow \quad c_1 = 0, \\ 0 &\stackrel{!}{=} w(\pi) = c_2 \sin(\sqrt{-(K+1)}\pi) && \Rightarrow \quad c_2 = 0 \text{ oder } \sqrt{-(K+1)} \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass nichttriviale Lösungen nur dann existieren, wenn $\sqrt{-(K+1)} \in \mathbb{N}$ oder anders ausgedrückt: $K = -1 - n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$.

iii) Wir bestimmen noch die zugehörige Lösung für v. Da v die Differentialgleichung $v' = Kv$ löst, haben wir $v(t) = \mathrm{e}^{Kt}$. Die Grundlösungen haben dann die Form

$$u_n(t,x) = \mathrm{e}^{-(1+n^2)t} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die allgemeine Lösung u des Randwertproblems erhält man dann durch Superposition, also

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-(1+n^2)t} \sin(nx), \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

iv) Mit der Anfangsbedingung haben wir

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} \sin(x) + 3\sin(5x).$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $c_1 = 1$, $c_5 = 3$, $c_n = 0$ für $n \notin \{1,5\}$, so dass sich die Lösung

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{-2t} \sin(x) + 3\mathrm{e}^{-26t} \sin(5x)$$

ergibt.