Hinweis:

- In dieser Klausur können bis zu 66 Punkte erreicht werden.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden alle Aufgaben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich fünf eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.
- In den Aufgaben 1 bis 4 sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Für die Aufgabe 2 kann die Tabelle auf dem ausgeteilten Beiblatt benutzt werden.
- In den Aufgaben 5 bis 6 werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden vorausssichtlich ab 30.09.2015 über das Online-Portal LSF bekanntgegeben. https://lsf.uni-stuttgart.de
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 14.10.2015 statt. Der genaue Termin wird auf der Homepage dieser HM3-Vorlesung bzw. auf der E-Learning Platform ILIAS bekanntgegeben. https://ilias3.uni-stuttgart.de

Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0. Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bei der Klausureinsicht einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es werden zufällig Glühbirnen aus zwei Kisten gezogen. Jede der beiden Kisten enthält 100 Birnen. Es bezeichne A das Ereignis, dass die gezogene Birne vom Typ A ist und T, dass die Birne mehr als 1000 h brennt.

Die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$P(T \mid A) = 0{,}8 \text{ und } P(T \mid \text{nicht}A) = 0{,}4.$$

a) Zieht man eine beliebige Glühbirne aus der ersten Kiste, so brennt sie mit einer Wahscheinlichkeit von 0,6 mehr als 1000 h. Wieviele Birnen vom Typ A enthält die Kiste?

Sei $p := P(A)$ die Wahrscheinlichkeit eine Birne vom Typ A aus der ersten Kiste zu ziehen. Dann ist $X = 100\,p$ die gesuchte Anzahl. Es gilt

$$0.6 \stackrel{!}{=} P(T) = P(A) \cdot P(T \mid A) + \underbrace{P(\bar{A})}_{=1-p} P(T \mid \bar{A})\ .$$

Dabei bezeichnet $\bar{A}$ das Gegenereignis zu A. Wir erhalten die Gleichung

$$0.6 = 0.4 + (0.8 - 0.4) \cdot p\ .$$

Die Lösung lautet

$$X = 50\ .$$

b) Zieht man eine Glühbirne aus einer **weiteren** Kiste und brennt diese mehr als 1000 h, so ist sie mit einer 40 %-igen Wahrscheinlichkeit vom Typ A. Wieviele Birnen vom Typ A enthält diese Kiste?

Sei wieder $X = 100\,p$ die Anzahl der Birnen vom Typ A in der zweiten Kiste.

$$0.4 \stackrel{!}{=} P(A \mid T) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(A) \cdot P(T \mid A)}{P(A) \cdot P(T \mid A) + \underbrace{P(\bar{A})}_{=1-P(A)} \cdot P(T \mid B)}$$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem an p:

$$0.4(p \cdot 0.8 + (1-p) \cdot 0.4) = 0.8 \cdot p$$

mit der Lösung $p = 0.25$. Daher ist

$$X = 25$$

die Anzahl der Birnen vom Typ A in Kiste 2.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

In einer technischen Anlage sind 1000 Module des selben Typs verbaut, welche unabhängig voneinader arbeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul an einem bestimmten Tag ausfällt ist mit 0,24 % relativ gering. Die Anlage arbeitet zuverlässig, solange nicht mehr als drei Module ausfallen.

a) Sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der ausgefallenen Module an einem bestimmten Tag zählt. Geben Sie die Zähldichte $P(X = k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ an.

$$P(X = k) = \binom{1000}{k}(0.0024)^k(0.9976)^{1000-k}$$

b) Betrachten Sie nun eine allgemeine Poissonverteilung $f(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Wie müssen Sie den Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ wählen, um obige Zähldichte möglichst gut zu approximieren?

$$\lambda = 2.4$$

c) An wieviel Prozent aller Tage arbeitet die Anlage zuverlässig? **Hinweis:** Benutzen Sie beiliegende Tabelle der Possionverteilung.

78%

d) Wie hoch dürfte die Ausfallwahrscheinlichkeit p eines einzelnen Moduls höchstens sein, damit die Anlage im Schnitt an 98 % aller Tage zuverlässig arbeitet?

Man liest aus der Tabelle $\lambda = 1$ ab.
Die Ausfallswahrscheinlichkeit darf daher höchstens 0.1% sein.

Höhere Mathematik 3 (aer/mawi)
Modulprüfung
03.09.2015

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $y' = Ay + b$ mit

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Jordanbasis für die Systemmatrix A.

Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$.

$$v_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) ,$$
$$v_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) .$$

b) Finden Sie alle Lösungen des homogenen Systems.

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$y(t) = e^t\big((c_1 + c_2 t)v_1 + c_2 v_2\big) = e^t\big(c_1(1,1)^\intercal + c_2(t+1, t-1)^\intercal\big) .$$

Dabei sind c_1 und c_2 beliebige reelle Konstanten.

c) Wie lautet die Lösung des inhomogenen Systems zu der Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Transformationsmatrix T und Ihre Inverse T^{-1} sind

$$T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right), \; T^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) .$$

Das Transformierte system lautet $\tilde{y}'(t) = T^{-1}AT\tilde{y} + T^{-1}b$, also

$$\tilde{y}_1'(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) + e^{2t}$$
$$\tilde{y}_2'(t) = \tilde{y}_2(t) .$$

Die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung ist $\tilde{y}_2 = c\,e^t$. Die Anfangsbedingung erzwingt $c = 0$. Dann $\tilde{y}_1 = e^{2t} - e^t$. Rücktransformation $y(t) = T\tilde{y}(t)$ ergibt

$$y_1(t) = y_2(t) = e^{2t} - e^t .$$

Probe: es gilt $y(0) = (0,0)^\intercal$ und

$$y'(t) = \left(\begin{smallmatrix} 2e^{2t} - e^t \\ 2e^{2t} - e^t \end{smallmatrix}\right) , \qquad Ay + b = \left(\begin{smallmatrix} e^{2t} - e^t \\ e^{2t} - e^t \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{smallmatrix}\right) .$$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Es sei $h(x, y) := 1 + x \cdot y$ eine reellwertige Funktion und

$$\mathcal{V} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq h(x, y) \right\}$$

ein ,,Zylinder" über der Kreisscheibe $\mathcal{B} = \left\{ x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0 \right\}$ mit Deckel

$$\mathcal{G} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ z = h(x, y) \right\}.$$

a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $\mathcal{V}$.

Gesucht ist das Volumen unter dem Graphen von h:

$$V = \int_{\mathcal{B}} \int_0^{h(x,y)} \mathrm{d}z \mathrm{d}x \mathrm{d}y \; .$$

Wir substituieren $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\,\sin(\varphi)$. Mit $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ folgt

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 h(r, \cos(\varphi), r\,\sin(\varphi)) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r + \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \mathrm{d}\varphi}_{=0} \; .$$

Also ist das Volumen π .

b) Parametrisieren Sie die Graphenfläche $\mathcal{G}$ der Funktion h über $\mathcal{B}$ und berechnen Sie eine Flächennormale $\vec{N}$ von $\mathcal{G}$.

Wir parametrisieren die Graphenoberfläche durch

$$\mathcal{B} \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (x,y,h(x,y))$$

Die Flächennormale ist

$$\forall (x,y) \in \mathcal{B} : \vec{N}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Alternativ, in (r,φ)-Koordinaten wir die Graphenfläche durch

$$G(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1 + r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Damit

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2\,r\,\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r^2\,(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2\,\sin(\varphi) \\ -r^2\,\cos(\varphi) \\ r \end{pmatrix} .$$

Dies ist der Normalenvektor, der zuvor in x,y-Koordinaten berechnet wurde, multipliziert mit dem Faktor r, der Funktionaldeterminante der Transformation auf ebene Polarkoordinaten. Man beachte, dass $\vec{N}$ positive z-Komponente hat, was geometrisch bedeuted dass die Flächennormale nach *außen* zeigt. Skizze!

c) Sei $\vec{W}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}^\intercal$ ein Vektorfeld. Berechnen Sie das Flussintegral $\int_{\mathcal{G}} \vec{W} \cdot \vec{n} dF$ von $\vec{W}$ durch $\mathcal{G}$. **Hinweis:** Es gilt: $2\cos\varphi\sin\varphi = \sin(2\varphi)$.

$$\int_{\mathcal{G}} \vec{W} \cdot \vec{n} dF = \int_{x^2+y^2\leq 1} (1+xy)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}_{=\pi} + 2\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}_{=0}$$
$$+ \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos^2(\varphi)\sin^2\varphi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}_{=\frac{\pi}{24}} .$$

Kurze Nebenrechnung zur Begründung der letzten Zeile:

$$\int_0^1 r^5\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2(2\varphi)\mathrm{d}\varphi}_{=\pi} .$$

Also

$$\int_{\mathcal{G}} \vec{W} \cdot \vec{n} dF = \frac{25}{24}\pi .$$

d) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss das Integral $\int_{\mathcal{V}} z \,\mathrm{dvol}$.

Satz von Gauß:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{dvol} = \int_{\mathcal{G}} W \cdot \mathrm{d}\vec{F} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} W \cdot \mathrm{d}\vec{F}}_{=0} .$$

Dafür ist das Normalenvektorfeld $\vec{F}$ so zu wählen dass es aus V herauszeigt. Die Wahl aus Teil b) bzw. c) ist also die Richtige. Weiter hat man $\mathrm{div}(W) = 2z$. Daher

$$2\int_{\mathcal{V}} z \,\mathrm{dvol} = \int_{\mathcal{G}} W \cdot \mathrm{d}\vec{F} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} W \cdot d\vec{F}}_{=0} .$$

Dabei verschwindet das Fluß-Integral durch $\mathcal{B}$, da das Vektorfeld für $z=0$ verschwindet. Zusammen mit Teil c) folgt

$$\int_{\mathcal{V}} z \,\mathrm{dvol} = \frac{25\pi}{48} .$$

Höhere Mathematik 3 (aer/mawi)

Modulprüfung

03.09.2015

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Es sei die 2π-periodische Funktion $f(x) := \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ auf $\mathbb{R}$ gegeben.
Man beachte, dass gilt: $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{-\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\,x}{2}}\right)$.

a) Man berechne die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ für $k \in \mathbb{Z}$:

f reell und gerade $\Rightarrow c_k = \bar{c}_k = \frac{1}{\pi}\Re\left(\int_0^\pi f(x)e^{-\mathrm{i}\,k\,x}\right)$.

$$c_k = \Re\left(\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_0^\pi \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-k)\,\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+k)\,\mathrm{i}\,x}\mathrm{d}x\right)$$
$$= \Re\left(\frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{1}{1/2-k}[1-\underbrace{\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-k)\,\mathrm{i}\,\pi}}_{=-(-1)^k\,\mathrm{i}} + \frac{1}{1/2+k}[1-\underbrace{\mathrm{e}^{-(1/2+k)\,\mathrm{i}\,\pi}}_{=(-1)^k\,\mathrm{i}}]\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{1}{1/2-k} + \frac{1}{1/2+k}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+2\,k}{1-4\,k^2} + \frac{1-2\,k}{1-4\,k^2}\right)$$
$$= \frac{2}{(1-4\,k^2)\pi}$$

Etwas einfacher: wegen $\sin(x) \geq 0$ auf $[0,\pi]$ gilt

$$c_k = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{-\mathrm{i}\,k\,x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,\pi\,i}\int_0^{2\,\pi}\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-k)\,\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+k)\,\mathrm{i}\,x}\mathrm{d}x)$$
$$= \frac{1}{4\,\pi\,i}\left(\frac{1}{(\frac{1}{2}-k)\,\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{(1/2-k)\,\mathrm{i}\,x}]_0^{2\,\pi} + \frac{1}{(1/2+k)\,\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{-(1/2+k)\,\mathrm{i}\,x}]_0^{2\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{4\,\pi\,i}\left(\frac{1}{(\frac{1}{2}-k)\,\mathrm{i}}\underbrace{[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\,(\frac{1}{2}-k)}]}_{=2} + \frac{1}{(1/2+k)\,\mathrm{i}}\underbrace{[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\,(1/2+k)}]}_{=2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{1}{1/2-k} + \frac{1}{1/2+k}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+2\,k}{1-4\,k^2} + \frac{1-2\,k}{1-4\,k^2}\right)$$
$$= \frac{2}{(1-4\,k^2)\pi}$$

b) Man gebe die reelle Fourierreihe $S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$ an:

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{2}{\pi} \qquad a_k = c_k + c_{-k} = \frac{4}{(1-4\,k^2)\pi}$$

$$b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = 0\,.$$

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe S_f gegen die Funktion f? Begründen Sie Ihre Antwort.

Für alle x, da f überall stetig (Skizze!) und stückweise stetig differenziebar.

d) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2}$:

Einsetzen von $x = 0$ liefert nach Teil b) und c)

$$0 = f(0) \overset{c)}{=} S_f(0) \overset{b)}{=} \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{1-4k^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{1-4k^2} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2} = \frac{-1}{2}$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

a) Bearbeiten Sie das Anfangswertproblem

$$x\,(x+4ay)\,y' + \big(2x + (a^2-3)y\big)\,y = 0$$
$$a \in \mathbb{R}, \quad y(3) = -\frac{1}{2}.$$

Für welche beiden Parameter a ist die Differentialgleichung exakt?

$$p_x = 2x + 4\,ay = q_y = 2x + (2a^2-6)y \implies a \in \{-1, 3\}$$

Sei nun $a = 3$. Geben Sie eine Potentialfunktion für die Differentialgleichung an.

$$u_y = p = x^2 + 12xy \implies u = x^2y + 6xy^2 + c(x)$$
$$u_x = q = 2xy + 6y^2 + c'(x) \implies c = \mathrm{const}$$

Wie lautet die Lösung des obigen Anfangswertproblems für $a = 3$?

$$u(x, y(x)) = x^2y + 6y^2x = u(3, -\frac{1}{2}) = 0 \implies y = -\frac{1}{6}x$$

b) Gegeben sei nun die neue Differentialgleichung

$$2x(1+x)y' + (2x+1)y = 0.$$

Leiten Sie eine Differentialgleichung für einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(y)$ her:

$$p = 2x(1+x), q = (2x+1)y$$
$$(\mu p)_x = (\mu q)_y \implies 2\mu = y\mu' + \mu$$

Geben Sie einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(y)$ an.

$$\mu' y = \mu \implies \mu = y$$