Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

9. März 1992

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik I/II

1. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind alle acht Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Beachten Sie die folgenden formalen Hinweise:

Fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!

Alle Blätter dürfen nur einseitig beschrieben werden!

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Mitte April im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 27. April 1992 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Punktmenge

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z+i|^2 = 2\,\mathrm{Im}\,(z) + 5\} \quad .$$

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbf{C}$ mit

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0 \quad .$$

Geben Sie die Lösungen in b) sowohl in Polarform als auch in der Form $z = a + ib$ an.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Vektoren $a = (1,2,3)^t$ und $b = (-2,3,1)^t$.

a) Bestimmen Sie den Winkel $\alpha \in [0,\pi]$ zwischen den beiden Vektoren.

b) Finden Sie orthogonale Vektoren $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$, welche dieselbe Ebene wie a und b aufspannen.

c) Ergänzen Sie $\{\tilde{a},\ \tilde{b}\}$ zu einer orthogonalen Basis $\{\tilde{a},\ \tilde{b},\ \tilde{c}\}$ des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3

Gegeben seien die drei Vektoren $v_1 = (-2,1,1)^t$, $v_2 = (1,-2,1)^t$ und $v_3 = (1,1,-2)^t$.

a) Bestimmen Sie die Drehmatrix D mit $D\,v_1 = v_2$, $D\,v_2 = v_3$ und $D\,v_3 = v_1$.

b) Berechnen Sie D^3.

c) Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel von D.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\cos x - 1}$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{-x}$.

c) Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}$ konvergent oder divergent? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $H(x,y) := \sin y + y + x^2 - x^3$.

a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $H(x,y) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs nach $y = f(x)$ auflösbar ist.

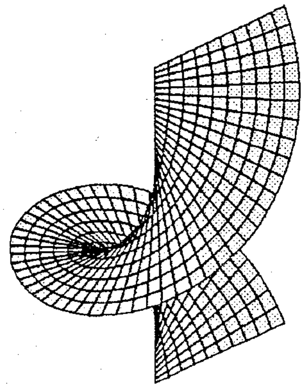
b) Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion f um den Nullpunkt bis zu Termen einschließlich 3. Ordnung.

c) Zeigen Sie, daß der Ursprung ein Extremum der Funktion f ist und bestimmen Sie dessen Charakter.

Aufgabe 6

Eine Fläche F sei gegeben durch

$$F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (r\cos t, r\sin t, t),\ r \in [0,1],\ t \in [0,2\pi]\} \ .$$



a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $n(r,t)$ von F.

b) Berechnen Sie den Betrag $|\Phi|$ des Flusses des Vektorfelds $v := (y,-x,z)^t$ durch die Fläche F.

c) Die Randkurve der Fläche F besteht aus 3 Geradenstücken sowie der Schraubenlinie $C : t \mapsto (\cos t, \sin t, t)^t$. Berechnen Sie die Länge von C.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $y'(x) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$

b) $y'(x) = \dfrac{2xy}{1+x^2}$

c) $y'(x) = x + y$

Aufgabe 8

Gegeben sei die von ε abhängige Matrix

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \varepsilon \in \mathbb{R}$$

und das Anfangswertproblem

$$\dot{x}_\varepsilon = A_\varepsilon x_\varepsilon\ , \quad x_\varepsilon(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A_ε für $\varepsilon \neq 0$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $\varepsilon \neq 0$.

c) Berechnen Sie $x_0(t) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t)$ und zeigen Sie, daß $x_0(t)$ das Anfangswertproblem für $\varepsilon = 0$ löst.